ГРУППЫ И АЛГЕБРЫ ЛИ. ОСЕННИЙ СЕМЕСТР 2006.

ЛИСТОК $6\frac{1}{2}$. КЛАССИФИКАЦИЯ СХЕМ ДЫНКИНА.

Пусть V — евклидово пространство. Систему векторов $v_1, \dots, v_k \in V$ мы называем *допустимой*, если v_i порождают V, и числа $n_{ij} = \frac{2(v_i, v_j)}{(v_j, v_j)}$ целые и неположительные. Допустимую систему назовем *неприводимой*, если она не разбивается в объединение двух взаимно ортогональных подсистем. Далее, неприводимой допустимой системе сопоставим её *схему*, которая определяется по аналогии со схемой Дынкина системы простых корней. Если допустимая система линейно независима, то эта схема называется *схемой Дынкина*, иначе *аффинной схемой Дынкина*. Под подсхемой в схеме мы понимаем набор вершин из исходной схемы с сохранением всех линий и стрелок.

$6\frac{1}{2}$.1. Докажите, что неприводимая допустимая система однозначно восстанавливается с точностью до гомотетии по своей схеме.

$6\frac{1}{2}$.2. Докажите, что если допустимая система линейно зависима, то в ней содержится $\dim V + 1$ векторов.

$6\frac{1}{2}$.3 (Двойственные схемы). На схеме неприводимой допустимой системы изменим направление всех стрелок. Докажите, что мы снова получим схему допустимой системы.

$6\frac{1}{2}$.4 (Подсхемы). Докажите, что собственная подсхема в схеме неприводимой допустимой системы является объединением непересекающихся подсхем, каждая из которых является схемой Дынкина.

$6\frac{1}{2}$.5 (Примеры аффинных схем Дынкина). а) Пусть Δ — система корней, Π — система простых корней в Δ, и δ — соответствующий максимальный корень. Тогда $\widetilde{\Pi} = \Pi \cup -\delta$ является допустимой системой. Для Δ типов $A - G$ нарисуйте соответствующие аффинные диаграммы Дынкина. Они обозначаются через $X^{(1)}$, где X — схема для Π (скажем $A_l^{(1)}$ для $X = A_l$) и называются *расширенными схемами Дынкина*.

б) Нарисуйте схемы, двойственные $B_l^{(1)}, C_l^{(1)}, F_4^{(1)}, G_2^{(1)}$. Они обозначаются через $A_{2l-1}^{(2)}, D_{l+1}^{(2)}, E_6^{(2)}, D_4^{(3)}$.

в) Наконец, система векторов $-2\varepsilon_1, \varepsilon_1 - \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{l-1} - \varepsilon_l, \varepsilon_l$, $l \geqslant 1$, является допустимой. Её аффинная схема Дынкина обозначается через $A_{2l}^{(2)}$.

$6\frac{1}{2}$.6 (Классификация схем Дынкина). а) Докажите, что схема Дынкина не содержит циклов.

б) *Валентностью* вершины схемы мы назовем число линий, которое в неё входит (или выходит) (скажем валентности всех вершин на схеме A_l кроме двух крайних равны 2, а у крайних — 1; у G_2 валентности обеих вершин — 3). Докажите, что валентность вершины не превосходит 3.

в) Докажите, что схемы Дынкина исчерпываются схемами $A - G$.

$6\frac{1}{2}$.7. Докажите, что аффинные схемы Дынкина исчерпываются приведенными в упражнении 9.5.