ГРУППЫ И АЛГЕБРЫ ЛИ. ОСЕННИЙ СЕМЕСТР 2006.

ЛИСТОК 7. АЛГЕБРЫ КАЦА-МУДИ.

Основное поле — $\mathbb{C}$. Через A обозначена обобщенная матрица Картана размера $r\times r$. Через e_i, f_i указаны образующие алгебр $\mathfrak{g}(A), \widetilde{\mathfrak{g}}(A)$.

7.1. Докажите, что подалгебра $\widetilde{\mathfrak{n}}_+ \subset \widetilde{\mathfrak{g}}(A)$ свободно порождается элементами $e_1, \dots, e_r$[1].

7.2 (Соотношения Серра). Пусть A — матрица Картана. Докажите, что ядро эпиморфизма $\widetilde{\mathfrak{g}}(A) \to \mathfrak{g}(A)$ порождается элементами $\mathrm{ad}(e_i)^{1-a_{ij}}e_j, \mathrm{ad}(f_i)^{1-a_{ij}}f_j$ [2].

7.3 (Нескрученные аффинные алгебры Каца-Муди). Пусть A — матрица Картана, $A^{(1)}$ — обобщенная матрица Картана, соответствующая расширенной схеме Дынкина (см. задачу $6\frac{1}{2}.5$). Пусть $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(A)$. Рассмотрим алгебру $\widehat{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g}\otimes\mathbb{C}[t,t^{-1}]\oplus\mathbb{C}K\oplus\mathbb{C}d$, в которой коммутатор задан следующим образом:

$$\begin{aligned}
&[x\otimes t^n, y\otimes t^m] = [x,y]\otimes t^{n+m} + (x,y)\delta_{m+n,0}K,\\
&[K,\widehat{\mathfrak{g}}] = 0,\\
&[d, x\otimes t^n] = nx\otimes t^n.
\end{aligned}$$

Здесь $(\cdot,\cdot)$ — инвариантная симметрическая невырожденная билинейная форма на $\mathfrak{g}$, нормализованная условием $(\alpha^\vee,\alpha^\vee) = 2$ для корня α максимальной длины.

а) Докажите, что $\widehat{\mathfrak{g}}$ действительно является алгеброй Ли.

б) В качестве картановской подалгебры мы берем $\mathfrak{t}\oplus\mathbb{C}K\oplus\mathbb{C}d$, где $\mathfrak{t}$ — картановская подалгебра в $\mathfrak{g}$. Опишите соответствующее корневое разложение.

в) Докажите, что $\widehat{\mathfrak{g}} \cong \mathfrak{g}(A^{(1)})$.

7.4 (Автоморфизмы полупростых алгебр Ли). Пусть $\mathfrak{g}$ — (конечномерная) полупростая алгебра Ли, $\mathfrak{t}$ — её картановская подалгебра, и Π — система простых корней, Δ_+ — система положительных корней, $\mathfrak{b} = \mathfrak{t}\oplus\bigoplus_{\alpha\in\Delta_+}\mathfrak{g}_\alpha$ — *борелевская* подалгебра, $G = \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})^\circ$.

а) Пусть Γ — подгруппа в $O(\mathfrak{t}(\mathbb{R}))$, состоящая из всех элементов, которые оставляют на месте Π. Постройте подходящее вложение $\iota : \Gamma \hookrightarrow \mathrm{Aut}(G)$, для которого $\iota(\gamma)$ оставляет на месте $\mathfrak{t}(\mathbb{R})$ и при ограничении на $\mathfrak{t}(\mathbb{R})$ совпадает с γ. Покажите, что $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g}) = \Gamma G$.

б) Вычислите группы Γ для простых алгебр Ли[3].

в) Докажите, что $Z_G(\mathfrak{t})$ — связная группа.

г) *Инволюцией Вейля* называется инволютивный автоморфизм алгебры $\mathfrak{g}$, который оставляет на месте $\mathfrak{t}$ и действует на $\mathfrak{t}$ умножением на -1. Докажите, что инволюция Вейля существует.

[1]Указание: постройте подходящее представление $\widetilde{\mathfrak{g}}(A)$ в тензорной алгебре $T(e_1,\dots,e_r)$.

[2]Комментарий: на самом деле, этот факт верен и для более широкого класса *симметризуемых* обощенных матриц Картана, см. задачу 7.8.

[3]Подсказка: Γ называется *группой диаграммных автоморфизмов*.

7.5 (Компактные формы). Мы придерживаемся обозначений предыдущей задачи.

а) Докажите, что существует полулинейное отображение $\sigma : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, которое является изоморфизмом $\mathfrak{g}$ как вещественной алгебры Ли, и для которого $\sigma|_{\mathfrak{t}} = -id, \sigma(e_i) = f_i, \sigma(f_i) = e_i$.

б) Положим $\mathfrak{k} = \mathfrak{g}^{\sigma}$. Тогда $\mathfrak{k} \oplus i\mathfrak{k} = \mathfrak{g}$, иными словами, $\mathfrak{k}$ является вещественной формой алгебры $\mathfrak{g}$.

в) Докажите, что форма Киллинга на $\mathfrak{k}$ отрицательно определена.

г) Докажите, что $\mathfrak{k}$ является алгеброй Ли связной компактной подгруппы в G.

7.6. Пусть A_1, A_2 — обобщенные матрицы Картана. Докажите, что $\mathfrak{g}(A_1) \times \mathfrak{g}(A_2)$ является алгеброй Каца-Муди для подходящей обобщенной матрицы Картана.

7.7. Пусть A — неразложимая обобщенная матрица Картана. Докажите, что $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}(A)) \subset \mathcal{D}(\mathfrak{g}(A))$, а фактор $\mathcal{D}(\mathfrak{g}(A))/\mathfrak{z}(\mathfrak{g}(A))$ прост.

7.8 (Инвариантная форма). Пусть A — неразложимая обобщенная матрица Картана, для которой существует такая диагональная матрица D, что матрица $D^{-1}A$ симметрическая (в этом случае говорят, что A *симметризуема*).

а*) Докажите, что на $\mathfrak{g}(A)$ существует невырожденная симметрическая билинейная форма.

б) Проверьте, что аффинные матрицы Картана (соответствующие аффинным схемам Дынкина) симметризуемы.