ГРУППЫ И АЛГЕБРЫ ЛИ. ОСЕННИЙ СЕМЕСТР 2006.

ЛИСТОК 8. УНИВЕРСАЛЬНЫЕ ОБЕРТЫВАЮЩИЕ АЛГЕБРЫ.

Через K обозначено поле $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$. Если группа Ли обозначается большой латинской буквой, то её касательная алгебра обозначается соответствующей маленькой готической буквой.

8.1 (Условие Оре). Докажите, что для всех ненулевых $x, y \in U(\mathfrak{g})$ найдутся ненулевые элементы $u, v \in U(\mathfrak{g})$, для которых $ux = vy$.

8.2 (Отображение симметризации). Докажите, что существует единственное отображение $S(\mathfrak{g}) \to U(\mathfrak{g})$, которое элемент $x_1 \dots x_k, x_i \in \mathfrak{g}$, переводит в

$$\frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} x_{\sigma(1)} \dots x_{\sigma(k)}.$$

Докажите, что оно является изоморфизмом $\mathfrak{g}$-модулей.

8.3*. Свободная алгебра Ли от n элементов единственным образом градуирована так, что все свободные образующие имеют степень 1. Докажите, что размерность компоненты r-ой степени равна $\frac{1}{r} \sum_{d|r} \mu(d) n^{r/d}$. Здесь μ — функция Мебиуса (равная 0, если d делится на квадрат простого числа, и $(-1)^k$, где k — количество простых делителей d в противном случае).

8.4. Докажите, что $U(\mathfrak{g})$ совпадает с алгеброй правоинвариантных дифференциальных операторов на G.[1]

8.5 (Скобка Пуассона на $S(\mathfrak{g})$, коприсоединенные орбиты, форма Костанта-Кириллова и отображение моментов). Имеется естественное отождествление алгебры $S(\mathfrak{g})$ с алгеброй $K[\mathfrak{g}^*]$ полиномиальных функций на $\mathfrak{g}^*$. Для функции $f \in K[\mathfrak{g}^*]$ и $\alpha \in \mathfrak{g}^*$ мы можем рассматривать $d_\alpha f$, как элемент из $\mathfrak{g}$. Для $f, g \in K[\mathfrak{g}^*]$ определим функцию $\{f, g\} \in K[\mathfrak{g}^*]$ по правилу $\{f, g\}(\alpha) = \langle \alpha, [d_\alpha f, d_\alpha g] \rangle$.

а) Докажите, что скобка $\{\cdot, \cdot\}$ кососимметрична, удовлетворяет тождеству Якоби и *тождеству Лейбница* $\{f, gh\} = \{f, g\}h + \{f, h\}g$. Такие скобки называются *скобками Пуассона.*

б) Напомним, что $\operatorname{gr} U(\mathfrak{g}) = S(\mathfrak{g})$. Пусть $a \in U_n(\mathfrak{g}), b \in U_m(\mathfrak{g})$. Если $\overline{a}, \overline{b}$ — классы элементов a, b в $U_n(\mathfrak{g})/U_{n-1}(\mathfrak{g}) \cong S^n(\mathfrak{g}), U_m(\mathfrak{g})/U_{m-1}(\mathfrak{g}) \cong S^m(\mathfrak{g})$, то $ab - ba \in \{\overline{a}, \overline{b}\} + U_{n+m-2}(\mathfrak{g})$.

в) Пункт а) позволяет определить на $\mathfrak{g}^*$ бивектор P (т.е. глобальное сечение внешнего квадрата касательного расслоения) по формуле $\langle P, df \wedge dg \rangle = \{f, g\}, f, g \in K[\mathfrak{g}^*] \cong S(\mathfrak{g})$. Докажите, что для любой точки α образ отображения $T^*_\alpha(\mathfrak{g}^*) \to T_\alpha(\mathfrak{g}^*), \xi \mapsto P_\alpha(\xi, \cdot)$ совпадает с касательным пространством к коприсоединенной орбите $G\alpha$ (т.е. к орбите точки α при коприсоединенном представлении). Таким образом, $P_\alpha \in \bigwedge^2 T(G\alpha)$.

г) Пусть $\alpha \in \mathfrak{g}^*$. Определим на $G\alpha$ *форму Костанта-Кириллова* ω следующим образом, для $\xi, \eta \in \mathfrak{g}$ полагаем $\omega(\xi.\alpha, \eta.\alpha) = \langle \alpha, [\xi, \eta] \rangle$. Докажите, что это определение корректно, что форма ω G-инвариантна и симплектична. Последнее означает, по определению, что ω невырождена в каждой точке и замкнута.

[1]Указание: рассмотреть символ дифференциального оператора

д) Докажите, что форма ω из предыдущего пункта является обратной к G-инвариантному бивектору на $G\alpha$, который в α совпадает с $P_\alpha \in \bigwedge^2 T_\alpha(G\alpha)$.

е*) Пусть G — связная полупростая группа Ли, H — её подгруппа Ли, ω — G-инвариантная симплектическая форма на G/H. Докажите, что существует единственный функционал $\alpha \in \mathfrak{g}^*$ и единственное G-эквивариантное накрытие $\mu : G/H \to G\alpha$, для которых ω совпадает с $\mu^*(\omega_{KK})$, где ω_{KK} — форма Костанта-Кириллова. Отображение μ является частным случаем т.н. *отображения моментов.* [2]

ж) Постройте контрпример к е), если G не является полупростой.

8.6 (Структура алгебры Хопфа). а) Докажите, что существуют единственный гомоморфизм алгебр $\Delta : U(\mathfrak{g}) \to U(\mathfrak{g}) \otimes U(\mathfrak{g})$, для которого $\Delta(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x, x \in \mathfrak{g}$, единственный гомомоморфизм алгебр $\varepsilon : U(\mathfrak{g}) \to K$ с $\varepsilon(x) = 0, x \in \mathfrak{g}$, и единственный антигомоморфизм алгебр $\iota : U(\mathfrak{g}) \to U(\mathfrak{g})$ с $\iota(x) = -x, x \in \mathfrak{g}$, (отображение ι — антигомоморфизм, если $\iota(ab) = \iota(b)\iota(a)$).

б) Пусть A — векторное пространство. Гомоморфизм $A \to A \otimes A$ называется *коумножением.* Дайте определение коассоциативного и кокомуттативного коумножения и докажите, что Δ таково. Дайте определение коединицы для коумножения и докажите, что отображение ε является коединицей для Δ. Ассоциативная алгебра с фиксированным коассоциативным коумножением и коединицей, которые являются гомоморфизмами алгебр называется *биалгеброй.*

в) Пусть A — биалгебра с умножением μ, коумножением Δ и коединицей ε. Антигомоморфизм алгебр $\iota : A \to A$ называется *антиподом*, если $\mu \circ (id \otimes \iota) \circ \Delta = \mu \circ (\iota \otimes id) \circ \Delta = \varepsilon$. Докажите, что $\iota : U(\mathfrak{g}) \to U(\mathfrak{g})$ является антиподом. Биалгебра, снабженная антиподом, называется *алгеброй Хопфа.*

г) Докажите, что отображение симметризации является гомоморфизмом коалгебр.

д) Элемент x коалгебры A называется *примитивным*, если $\Delta(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x$. Докажите, что множество примитивных элементов в $U(\mathfrak{g})$ совпадает с $\mathfrak{g}$. Докажите, что если A — биалгебра, то множество примитивных элементов является подалгеброй Ли.

е) Определите тензорное произведение модулей над произвольной алгеброй Хопфа и двойственный модуль так, чтобы в случае $U(\mathfrak{g})$ эти определения были совместимы с тензорным произведением и двойственным для $\mathfrak{g}$.

ж) Биалгебра называется *фильтрованной* (возрастающей фильтрацией A_n), если она фильтрована как алгебра, $A_0 = K$, и $\Delta(A_n) \subset \sum_{k+m=n} A_k \otimes A_m$. Докажите, что $U(\mathfrak{g})$ является фильтрованной биалгеброй.

з*) Обратно, пусть A — кокоммутативная фильтрованная алгебра Хопфа, пространство примитивных элементов которой конечномерно (последнее условие можно убрать). Тогда A отождествляется с универсальной обертывающей алгеброй алгебры Ли своих примитивных элементов.

---

[2] Указание: докажите, для начала, что для вектора скорости ξ_* (задача 5.15) внутреннее произведение $i_{\xi_*}\omega$ — точная форма.