ГРУППЫ И АЛГЕБРЫ ЛИ. ОСЕННИЙ СЕМЕСТР 2006.

ЛИСТОК 9. НЕПРИВОДИМЫЕ МОДУЛИ НАД ПРОСТЫМИ АЛГЕБРАМИ ЛИ.

Предполагается, что основное поле $\mathbb{C}$. Через $\mathfrak{g}$ обозначена простая алгебра Ли, а через Δ её решетка корней, через W — её группа Вейля. Через $L(\lambda)$ обозначен неприводимый модуль со старшим весом λ.

9.1 (Сопряженные модули). Докажите, что $L(\lambda)^* = L(\lambda^*)$, где $\lambda^* = -w_0\lambda$, а w_0 — элемент максимальной длины в группе Вейля. Найдите отображение $\lambda \mapsto \lambda^*$ для простых алгебр Ли.

9.2 (Веса модуля $L(\lambda)$). а) Докажите, что доминантный вес μ является весом в $L(\lambda)$ тогда и только тогда, когда $\lambda - \mu \in \mathbb{Z}_+\Delta$.

б) Докажите, что множество весов $\mathfrak{g}$-модуля $L(\lambda)$ является пересечением $\lambda - \mathbb{Z}_+\Delta$ и выпуклой оболочки множества $W\lambda$.

9.3. Докажите, что ядро эпиморфизма $V(\lambda) \to L(\lambda)$ порождено векторами $e_{-\alpha_i}^{\langle\lambda,\alpha_i^\vee\rangle+1}v_\lambda$, где $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ — все простые корни алгебры $\mathfrak{g}$.

9.4. Сформулируйте точно, что значит "$\dim L(\lambda)$ является монотонной функцией от λ" и докажите получившееся утверждение.

9.5. Разложите на неприводимые внешние и симметрические степени тавтологических представлений классических алгебр Ли.

9.6 (Микровеса и другие малые веса). а) Доминантный вес λ называется *микровесом*, если множество весов $L(\lambda)$ совпадает с $W\lambda$. Постройте взаимно-однозначное соответствие между множеством микровесов и фундаментальной группой системы корней Δ (см. задачу 6.6). Опишите микровеса для простых алгебр Ли. Опишите соответствующие системы весов.

б) Опишите для всех простых алгебр Ли все веса λ, удовлетворяющие следующему свойству: множество весов $L(\lambda)$ совпадает с $W\lambda \cup \{0\}$.

в) Опишите все простые веса λ с $\dim L(\lambda) \leqslant \dim \mathfrak{g}$ для $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_{2n+1}$.

г*) Найдите все веса λ, для которых $L(\lambda)$ имеет простой спектр, т.е. размерность каждого весового пространства в $L(\lambda)$ не превосходит 1.

9.7. Докажите, что тензорное произведение двух нетривиальных конечномерных $\mathfrak{g}$-модулей приводимо.

9.8 (Формула Костанта для кратности веса). На $\mathfrak{t}(\mathbb{R})^*$ определим *функцию Костанта* K как количество способов представить элемент в виде суммы положительных корней. Докажите, что для веса μ и старшего веса λ имеет место равенство

$$\dim L_\mu(\lambda) = \sum_{w\in W} (-1)^{l(w)} K(w(\lambda+\rho) - (\mu+\rho)),$$

где $l(w)$ — длина элемента w, а через ρ обозначена сумма фундаментальных весов.

9.9 (Комбинаторного формула для тензорного произведения). Для доминантных весов λ, μ, ν определим константы $m(\lambda,\mu;\nu)$ следующим образом: $L(\lambda)\otimes L(\mu) \cong \bigoplus m(\lambda,\mu;\nu)L(\nu)$. Докажите, что

$$m(\lambda,\mu;\nu) = \sum_{w,w'\in W} (-1)^{l(w)+l(w')} K(w(\lambda+\rho)+w'(\mu+\rho)-(\nu+2\rho)).$$

Недостатком предыдущей формулы является сложный комбинаторный характер функции Костанта, а также необходимость двукратного суммирования по группе Вейля. Следующая формула, хотя и не является комбинаторной, оказывается весьма полезной при работе с тензорными произведениями. Она принадлежит Parthasaraty, Rango Rao, Varadarajan, и по этой причине в просторечии называется "формулой трех индусов", а более официально PRV-формулой.

9.9$\frac{1}{2}$*. Произнесите без запинки имена трех упомянутых выше господ.

9.10* (PRV-формула). Докажите, что

$$m(\lambda,\mu;\nu) = \dim L_{\nu-\lambda}(\mu) \cap \bigcap_{i=1}^{\mathrm{rk}\,\mathfrak{g}} \ker e_i^{\langle\lambda,\alpha_i^\vee\rangle+1} = \dim L_{\lambda-\mu^*}(\nu) \cap \bigcap_{i=1}^{\mathrm{rk}\,\mathfrak{g}} \ker e_i^{\langle\mu^*,\alpha_i^\vee\rangle+1}.[1]$$

9.11*. Пусть $\mathfrak{g}$ — полупростая алгебра Ли. Опишите все представления алгебры $\mathfrak{g}$, для которых найдется элемент $h\in\mathfrak{g}$, собственными значениями которого в пространстве представления являются $\pm1, 0$ (с какими-то кратностями).

[1]Указание: постройте отображение из пространства старших векторов веса ν в $L(\lambda)\otimes L(\mu)$ в пространство $L_{\nu-\lambda}(\mu)$