ГРУППЫ И АЛГЕБРЫ ЛИ. ОСЕННИЙ СЕМЕСТР 2006.

ДОМАШНИЙ ЭКЗАМЕН

Этот экзамен предназначен для тех, кто хочет сдать курс на оценку 5. Deadline по нему наступает 1.05.2007. Для получения более скромной оценки требуется решить достаточное количество задач из листков с целыми номерами. При этом, для получения оценки 3 три последних листка решать не обязательно. Здесь deadline — 15.01.2007.

Экзаменационные задачи сложные. Поэтому для получения оценки 5 не обязательно решить все. Требуется, однако, чтобы была решена задача из первых трех и из последних трех. Частичные продвижения также имеют ценность. При решении задач разрешается использовать справочный раздел книги Э.Б. Винберга и А.Л. Онищика "Семинар по группам Ли и алгебраическим группам".

Для обсуждения условий сдачи следует связаться с лектором по адресу:

ivanlosev@yandex.ru

1. Здесь основное поле характеристики 0. Пусть $\mathfrak{g}$ — разрешимая алгебра Ли, для которой $\mathcal{D}^n\mathfrak{g} \neq \{0\}$. Докажите, что для $1 \leqslant i \leqslant n-1$ имеет место неравенство $\dim \mathcal{D}^i(\mathfrak{g})/\mathcal{D}^{i+1}(\mathfrak{g}) \geqslant 2^{i-1}+1$ ($\mathcal{D}^i(\mathfrak{g})$ — i-ый член производного ряда).

2. Пусть G — связная разрешимая вещественная группа Ли, H — её связная нормальная подгруппа Ли коразмерности 1. Докажите, что в G найдется одномерная подгруппа F, для которой $G = H \leftthreetimes F$.

3. Здесь (и в последующих задачах) основное поле $\mathbb{C}$.

Пусть $\mathfrak{g}$ — простая алгебра Ли, $\mathfrak{t}$ — её картановская подалгебра, Δ, Δ_+, Π — системы корней, положительных и простых корней, соответственно, $e_\alpha, \alpha \in \Delta$, — ненулевой элемент в $\mathfrak{g}_\alpha$. Докажите, что элементы $e = \sum_{\alpha\in\Pi} e_\alpha, h = \sum_{\alpha\in\Delta_+} h_\alpha$ включаются в единственную подалгебру изоморфную $\mathfrak{sl}_2$. Для каких $\mathfrak{g}$ эта подалгебра является максимальной по включению собственной подалгеброй?

4. Найдите все простые алгебры $\mathfrak{g}$, для которых существует конечномерное представление $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ и линейный изоморфизм $\tau : \mathfrak{t} \to \mathfrak{t}$, не приходящий из $N_{\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})}(\mathfrak{t})$, для которых операторы $\varphi(\xi), \varphi(\tau(\xi))$ сопряжены в $\mathrm{GL}(V)$ для любого $\xi \in \mathfrak{t}$. Для каких алгебр можно ограничиться неприводимым представлением φ?

5. Опишите все линейные автоморфизмы F пространства $n \times n$-матриц, для которых $\mathrm{tr}(F(A)^{2007}) = \mathrm{tr}(A^{2007})$ при всех A.

6. Найдите все редуктивные подалгебры $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g} := \mathfrak{sl}_n$, для которых $\mathfrak{h}$-модуль $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ неприводим.