ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ ПОЛЕЙ КЛАССОВ: ЭКЗАМЕН

(1) Докажите, что пополнение $\mathbb{C}_p$ алгебраического замыкания поля p-адических чисел алгебраически замкнуто.

(2) Докажите, что индекс подгруппы n-ых степеней в мультипликативной группе локального поля k равен $|\mu_n(k)| \cdot n \cdot |n|_k^{-1}$, где $\mu_n(k)$ – группа корней n-ой степени из единицы в k, и $|n|_k = \begin{cases} |\mathcal{O}_k/(n)|, & \text{если } k \text{ неархимедово}, \\ n, & \text{если } k = \mathbb{R}, \\ n^2, & \text{если } k = \mathbb{C}. \end{cases}$

(3) Пусть k – локальное поле. Опишите группу Галуа расширения $k^{\mathrm{ab}}/k(\mu_\infty)$.

(4) Пусть k – p-адическое поле. Рассмотрим обратную (проективную) систему $A_i = \Omega_{\mathcal{O}_{\overline{k}}/\mathcal{O}_k}$, $i \geqslant 0$ с отображениями $A_{i+1} \xrightarrow{\times p} A_i$ умножения на p. Докажите, что обратный предел этой системы $\varprojlim A_i$ канонически изоморфен $\mathbb{C}_p(1) := \mathbb{C}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p(1)$, где $\mathbb{Z}_p(1) := \varprojlim \mu_{p^i}$ – обратный предел системы $B_i = \mu_{p^i} \subset \overline{k}$, $i \geqslant 0$ с отображениями $B_{i+1} \xrightarrow{.p} B_i$ возведения в степень p.