Экзамен по топологии-2

1. Пусть X, Y — два CW-комплекса, и имеется взаимно однозначное соответствие между наборами их клеток, сохраняющее размерность клеток и их коэффициенты инцидентности. Доказать или построить контрпример к утверждению, что тогда X и Y гомотопически эквивалентны.

2. Для каких $k > 0$ и n найдется компактное многообразие без края, гомеоморфное $\Sigma^k(T^n)$ — k-кратной надстройке тора T^n?

3. Посчитать индексы пересечения (по модулю двойки) всех клеток Шуберта в грассмановом многообразии $G_2(\mathbf{R}^4)$.

4. При каких k, n грассманово многообразие $G_k(\mathbf{R}^n)$ ориентируемо?

5. Пусть X, Y — линейно связные топологические пространства. Вычислить фундаментальную группу их джойна, зная $\pi_1(X)$ и $\pi_1(Y)$.

6. Рассмотрим *конфигурационное пространство* $B(S^1, 3)$, точками которого являются неупорядоченные наборы из трех попарно различных точек на S^1. Сколько над ним существует неэквивалентных накрытий ?

7. Рассмотрим цилиндр $S^1 \times [0, 1]$ и отображение окружности $S^1 \times \{1\}$ на окружность $S^1 \times \{0\}$, наматывающее первую из них на вторую дважды. Рассмотрим факторпространство нашего цилиндра по отождествлению, заданному этим отображением. Каковы будут гомологии полученного пространства? Фундаментальная группа?

8. Верно ли, что любое непрерывное отображение букета связных топологических пространств $X \vee Y \to \mathbf{RP}^3$ продолжается до непрерывного отображения их произведения $X \times Y \to \mathbf{RP}^3$? (Букет естественно отождествляется с подпространством прямого произведения, именно, с объединением множеств $X\times$(отмеченная точка в Y) и $Y\times$(отмеченная точка в X).)

9. Посчитать группу H_4 для множества вырожденных вещественных квадратных матриц 3×3, у которых сумма квадратов матричных элементов равна 1. Подсказка: можно воспользоваться двойственностью Александера.