НМУ, римановы поверхности. Листок 1.
Анализ на римановых поверхностях. 18.09.2007

Задача 1. Доказать, что для конформной римановой метрики $\lambda^2(z)dzd\bar{z}$ на римановой поверхности гауссова кривизна K может быть найдена по формуле

$$K = -\Delta \ln K,$$

где

$$\Delta = \frac{4}{\lambda^2}\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{\lambda^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y}\right)$$

оператор Лапласа-Бельтрами.

Задача 2. Доказать, что на любой римановой поверхности существует конформная риманова метрика.

Задача 3. Пусть $u : X \longrightarrow \mathbb{R}$ гармоническая функция на односвязной римановой поверхности X. Доказать, что существует гармоническая функция $v : X \longrightarrow \mathbb{R}$ сопряженная к u, то есть такая, что функция $u + iv : X \longrightarrow \mathbb{C}$ голоморфна.

Задача 4. Доказать теорему единственности: если X и Y римановы поверхности, а $f, g : X \longrightarrow Y$ голоморфные отображения, которые совпадают на некотором подмножестве $A \subset X$, обладающем предельной точкой $a \in X$, то $f \equiv g$ на X.

Задача 5. Доказать, что если X и Y римановы поверхности, а $f : X \longrightarrow Y$ инъективное голоморфное отображение, то f осуществляет биголоморфное отображение X на $f(X)$.

Задача 6. Доказать, что если X и Y римановы поверхности, причем X компактна, а $f : X \longrightarrow Y$ непостоянное голоморфное отображение, то Y тоже компактна, а отображение f сюръективно.