НМУ, римановы поверхности. Листок 2.
Накрытия. 25.09.2007

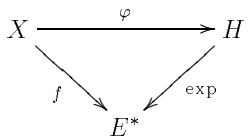
Задача 1. Будем называть непрерывное отображение $f : X \longrightarrow Y$ локально компактных топологических пространств (то есть таких, что каждая точка содержится в некотором компактном подмножестве) собственным, если прообраз любого компактного множества компактен. Доказать, что собственное отображение замкнуто, то есть образ всякого замкнутого подмножества замкнут.

Задача 2. Пусть X и Y локально компактные пространства и $p : Y \longrightarrow X$ собственное неразвлетвлённое накрывающее отображение. Доказать, что тогда p безграничное накрытие.

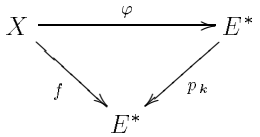
Задача 3. Пусть X связное многообразие. Доказать, что тогда существует связное и односвязное многообразие $\tilde{X}$ и неразвлетвлённое безграничное накрывающее отображение $p : \tilde{X} \longrightarrow X$.

Задача 4. Пусть X риманова поверхность, $E^* = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 1\}$ проколотый единичный круг и $f : X \longrightarrow E^*$ голоморфное неразвлетвлённое и безграничное накрытие. Доказать, что тогда

a) если накрытие f является бесконечнолистным, то существует биголоморфное отображение $\varphi : X \longrightarrow H$ римановой поверхности X на левую полуплоскость $H = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z < 0\}$, такое, что коммутативна диаграмма

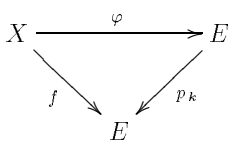


b) если накрытие f является k-листным, $k < \infty$, то существует биголоморфное отображение $\varphi : X \longrightarrow E^*$, такое, что коммутативна диаграмма



где $p_k(z) = z^k$.

Задача 5. Пусть X риманова поверхность, $E = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ единичный круг и $f : X \longrightarrow E$ собственное голоморфное отображение, неразвлетвлённое над $E^* = E \setminus \{0\}$. Доказать, что тогда существует натуральное число k и биголоморфное отображение $\varphi : X \longrightarrow E$, такое, что коммутативна диаграмма



где $p_k(z) = z^k$.