НМУ, римановы поверхности. Листок 3.
Пучки. 02.10.2007

Задача 1. Доказать, что следующие предпучки на самом деле являются предпучками, и более того, пучками.

a) C_M — предпучок непрерывных функций на топологическом пространстве M;

b) C_M^∞ — предпучок гладких функций на многообразии M;

c) $\mathscr{O}_M$ — предпучок голоморфных функций на римановой поверхности M;

d) $\mathbb{Z}_M$ — предпучок локально постоянных $\mathbb{Z}$-значных функций на топологическом пространстве M;

e) J_D — предпучок голоморных функций на римановой поверхности M, равых нулю на объединении изолированных точек $D \subset M$.

Задача 2. Докажите, что прямая сумма двух (пред)пучков $\mathscr{F} \oplus \mathscr{G}$ является (пред)пучком, где прямая сумма определяется правилами

a) $[\mathscr{F} \oplus \mathscr{G}](U) = \mathscr{F}(U) \oplus \mathscr{G}(U)$,

b) ${}_{\mathscr{F}\oplus\mathscr{G}}r_V^U = {}_{\mathscr{F}}r_V^U \oplus {}_{\mathscr{G}}r_V^U$, где левый нижний индекс обозначает соответствующий пучок.

Задача 3. Определите аналогичным образом (пред)пучок локальных морфизмов (также называемый пучком гомоморфизмов) $\mathrm{Hom}(\mathscr{F}, \mathscr{G})$, и проверьте, что это (пред)пучок.

Задача 4. *Носителем* $\operatorname{supp} s$ *сечения* $s \in \mathscr{F}(U)$ называется множество $\operatorname{supp} s = \{x \in U | s_x \neq 0\}$. Докажите, что $\operatorname{supp} s$ замкнуто в U. Носителем пучка $\mathscr{F}$ на многообразии M называется множество $\operatorname{supp} \mathscr{F} = \{x \in M | \mathscr{F}_x \neq 0\}$, это множество может быть незамкнуто (попробуйте построить пример).

Задача 5. Обратите внимание на то, что этальное пространство пучка является накрытием, но оно вполне может не быть локально тривиальным накрытием! Попытайтесь построить такой пример.