Все кольца предполагаются коммутативными и ассоциативными.

1. Рассмотрим множество $\{0,1\}$ со следующими законами сложения и умножения (сложение и умножение чета и нечета)

$$0+0=0, 0+1=1, 1+1=0; \quad 0\times 0=0, 0\times 1=1\times 0=0, 1\times 1=1.$$

докажите что получилось поле.

2. Рассмотрим множество цифр $\{0,1,\cdots,9\}$ со следующими законами сложения $a\overline{+}b$ и умножения $a\overline{\times}b$: $a\overline{+}b$ ($a\overline{\times}b$) это последняя цифра суммы (произведения) a и b в обычном смысле. Докажите что получилось кольцо. Является ли оно полем?

3^* . Рассмотрим множество выражений $a+b\rho$, $a,b\in\mathbb{Q}$ с почленным сложением: $(a+b\rho)+(c+d\rho)=(a+c)+(b+d)\rho$ и с законом умножения $\rho^2=-\rho-1$: $(a+b\rho)\times(c+d\rho)=(ac-bd)+(ad+bc-bd)\rho$. Докажите что это поле.

Определение. Пусть A и B - два кольца и $f:A\to B$ - отображение. f называется *гомоморфизмом колец* если оно переводит сумму в сумму $f(a+b)=f(a)+f(b)$ и произведение в произведение $f(a\times b)=f(a)\times f(b)$.

4. Пусть $f:A\to B$ - гомоморфизм колец. Докажите что образ нуля 0_A в A есть ноль 0_B в B: $f(0_A)=0_B$. Обязательно ли образ единицы есть единица?

5. Пусть $f:A\to B$ - гомоморфизм колец. Рассмотрим прообраз $f^{-1}(0_B)=\{a\in A|f(a)=)_B\}$ нуля 0_B(он еще называется ядром гомоморфизма f). Докажите что прообраз нуля удовлетворяет следующим двум свойствам:

$$a\in f^{-1}(0_B), b\in f^{-1}(0_B)\Longrightarrow (a\pm b)\in f^{-1}(0_B);$$

$$\lambda\in A, a\in f^{-1}(0_B)\Longrightarrow \lambda a\in f^{-1}(0_B).$$

Подмножества $\mathfrak{a}\subset A$, удовлетворяющие этим двум свойствам, называются *идеалами.*

6^{**}. Докажите что всякий идеал является ядром (прообразом нуля) какого-то гомоморфизма колец.