Алгебра 10

1. Пусть Q - невырожденная квадратичная форма. Может ли недиагонализуемый оператор быть самосопряженным относительно этой формы?

2. Пусть A - самосопряженный оператор относительно положительно определенной формы $Q(u) = B(u,u)$ и $a_1, \cdots a_n$ – все ее собственные значения в порядке возрастания $a_1 \le a_2 \le \cdots \le a_n$. Докажите что для ненулевого вектора u $a_1 \le B(u, Au)/B(u,u) \le a_n$.

3.Пусть A - самосопряженный оператор относительно положительно определенной формы $Q(u) = B(u,u)$ на n -мерном пространстве L и $a_1, \cdots a_n$ – все ее собственные значения в порядке возрастания $a_1 \le a_2 \le \cdots \le a_n$. Обозначим через $Q_A(u) = B(Au, u) = B(u, Au)$. Пусть $L' \subset L$ – $n-1$-мерное подпространство; тогда ограничение Q на L' является положительно определенной формой, обозначим ее Q'. Ограничение Q_A – квадратичная форма на L' и, стало быть, имеет вид $Q'_{A'}$ для некого Q'-самосопряженного оператора A'. Пусть $a'_1 \le a'_2 \le \cdots \le a'_{n-1}$ – собственные значения A'. Докажите что $a_1 \le a'_1 \le a_2$ и $a_{n-1} \le a'_{n-1} \le a_n$.

4. Пусть $L_0, L_1, L_2, \cdots, L_n, \cdots$ – результат ортогонализации набора $1, x, x^2, \cdots, x^n, \cdots$ по отношению к квадратичной форме

$$\int_{-1}^{1} f^2(x) e^{-x^2} d\,x.$$

Докажите что

$$\frac{d^2}{d\,x^2} L_n - 2x \frac{d}{d\,x} L_n + 2n L_n = 0.$$