1. Пусть $c \in \mathbb{R}, c \neq 0$. Докажите что $\mathbb{R}[x]/(x^2 - c^2) = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$.

2. Пусть R – кольцо (вещественнозначных) функций на отрезке $[-1, 1]$. Пусть a – точка этого отрезка. Положим $\mathcal{I}_a = \{f \in R | f(a) = 0\}$ – множество функций, зануляющихся в a. Докажите что $\mathcal{I}_a$ – идеал и $R/\mathcal{I}_a = \mathbb{R}$.

3. Пусть R – как в задаче 2. Пусть a – ненулевая точка этого отрезка. Положим $\mathcal{I}_{-a,a} = \{f \in R | f(-a) = f(a) = 0\}$ – множество функций, зануляющихся в a. Докажите что $\mathcal{I}_{-a,a}$ – идеал и $R/\mathcal{I}_{-a,a} = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$. Ср. с задачей 1.

4. Для любого вещественного α рассмотрим формальный степенной ряд

$$F_\alpha(x) = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{2 \times 3}x^2 + \cdots .$$

Докажите что $F_\alpha(x) \times F_\beta(x) = F_{\alpha+\beta}(x)$. Ряд $F_\alpha(x)$ можно назвать $(1+x)^\alpha$. Почему?

5. В кольце формальных степенных рядов $\mathbb{Q}[[z]]$ с *рациональными* коэффициентами существуют корни любой степени из ряда вида $1 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots$.

6. Докажите что кольцо формальных рядов Лорана $F[z^{-1}, z]]$ над полем F является полем.

7. Опишите все идеалы в кольце формальных степенных рядов $F[[z]]$ над полем F

8. Докажите что кольцо формальных рядов Лорана $F[z^{-1}, z]]$ над полем F является полем частных кольца формальных степенных рядов $F[[z]]$.