Алгебра 3

1. Пусть f_i, $i = 1, \cdots, n$ – многочлены степеней n_i над полем F. Предположим что они попарно взаимно просты: наибольший общий делитель f_i и f_j $(i \neq j)$ равен 1. Докажите, что для любых многочленов ψ_i степеней меньших чем n_i найдется многочлен Ψ такой что остаток от деления Ψ на f_i равен ψ_i.

2. Пусть $f_i, i = 1, \cdots, n$ – многочлены как в задаче 1. Положим $f = \prod f_i$. Докажите что

$$F[x]/(f(x)) = \oplus F[x]/(f(x)_i)$$

3. Докажите что $\mathbb{R}[x]/((x^2+1)^2) = \mathbb{C}[y]/(y^2)$.

4. Рассмотрим множество попарно различных *целых* чисел n_i. Докажите что многочлен $f(x) = \prod(x - n_i) - 1$ неприводим. Верно ли это если n_i не взаимно просты над $\mathbb{Q}$? Верно ли это если заменить -1 на $+1$?

5. Докажите что кольцо многочленов от двух переменных над полем факториально (разложение на простые множители однозначно). Верно ли это для кольца многочленов от n переменных над полем? Верно ли это для кольца целочисленных многочленов от n переменных?

6. Докажите что кольцо гауссовых целых чисел $\mathbb{Z}[i] = \mathbb{Z}[x]/(x^2+1)$ факториально. Для этого попробуйте научится делить их с остатком. Нарисуйте на плоскосте множество гауссовах чисел кратных $a + bi$.