Алгебра 4

1. (Критерий Эйзенштейна) Пусть $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ целчисленный многочлен такой, что все его коэффициенты a_i, кроме старшего делятся на простое число p, а свободный член a_n *не делится* на p^2. Докажите что $f(x)$ неприводим.

2. Докажите что (p – нечетное простое)

а)$\Phi_p(x) = x^{p-1} + x^{p-2} + \cdots + 1 = (x^p - 1)/(x-1)$

б)$\Phi_{2p}(x) = x^{p-1} - x^{p-2} + x^{p-3} \cdots - x + 1 = (x^{2p} - 1)/((x^p - 1)(x+1))$

в) $\Phi_9(x) = x^6 + x^3 + 1 = (x^9 - 1)/(x^3 - 1)$

неприводимы над $\mathbb{Q}$.

3. Пусть многочлены $X(t), Y(t)$ и $Z(t)$ с комплексными коэффициентами удовлетворяют уравнению $X^n + Y^n = Z^n$, $n > 2$. Докажите что эти многочлены постоянны. (попробуйте понизить степень).

4.Пусть R – кольцо непрерывных функций на отрезке $[-1, 1]$. Пусть a – точка этого отрезка. Положим $\mathcal{I}_a = \{f \in R | f(a) = 0\}$ – множество функций, зануляющихся в a. Докажите что $\mathcal{I}_a$ – идеал и $R/\mathcal{I}_a = \mathbb{R}$.

5. Докажите что идеал $\mathcal{I}_a$ из предыдущей задачи не может быть порожден конечным числом функций, стало быть, кольцо непрерывных функций не нетерово.

6. Пусть R – как в задаче 4. Докажите что для каждого нетривиального идеала J найдется точка a отрезка такая, что все функции из идеала J в этой точке равны нулю.