Алгебра 5

1. Докажите что одночлены x^j образуют базис векторного пространства многочленов.

2. Докажите что одночлены x^j не образуют базис векторного пространства формальных степенных рядов.

3. Докажите что векторные пространства
а) многочленов
б) функций на отрезке
не обладают конечным базисом.

4. Всякий вектор v векторного пространства V определяет линейный функционал l_v на пространстве $V^\vee$ линейных функционалов на V по формуле $l_v(\phi) = \phi(v)$, $\phi \in V^\vee$.

Докажите что в силу предыдущей конструкции пространство функционалов $(V^\vee)^\vee$ совпадает с V для конечномерного V.

5. Формальный степенной ряд ω от x^{-1} определяет линейный функционал l_ω на векторном пространстве многочленов от x по формуле $l_\omega(f)$ равен свободному члену произведения ωf.

Докажите что в силу приведенной конструкции пространство линейных функционалов на векторном пространстве многочленов от x совпадает с пространством формальных степенных рядов от x^{-1}.

6. (Для продвинутых в теории множеств) Докажите что пространство формальных степенных рядов над $\mathbb{Q}$ не обладает счетным базисом.