## Алгебра 6

Напомним, что рангом множества векторов называется количество векторов в максимальном подмножестве линейно независимых векторов. Строчным (соответственно столбцовым) рангом матрицы называется ранг множества строк (соответственно столбцов) матрицы.

1. Докажите что столбцовый ранг матрицы равен строчному.

Пусть $A = (a^i_j)$ - матрица размера $m \times n$. Пусть $I$ (соответственно $J$) подмножество отрезка $[1, \cdots, m]$ (соответственно $[1, \cdots, m]$) мощности $k$. Рассмотрим совокупность $(a^i_j), i \in I, j \in J$; это квадратная матрица размера $k \times k$. Ее определитель называется $(IJ)$м $k$-*минором* матрицы $A$

2. Докажите что ранг мотрицы не меньше $k$ тогда и только тогда когда какой-нибудь $k$-минор не равен нулю.

3. Вычислите следующие определители

$$\text{а)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}; \quad \text{б)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ x_1^{j-1} & x_2^{j-1} & \cdots & \cdots & x_n^{j-1} \\ x_1^{j+1} & x_2^{j+1} & \cdots & \cdots & x_n^{j+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n} & x_2^{n} & \cdots & \cdots & x_n^{n} \end{vmatrix}.$$

Здесь $x_i^j$ обозначает $j$-ю степень переменной $x_i$.

4. Вычислите следующие определители

$$\text{а)} \begin{vmatrix} 1-n & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1-n & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1-n & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-n \end{vmatrix}; \quad \text{б)} \begin{vmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

5. Вычислите следующие определители: а) $|(i+j-1)|_{i,j=1,n}$, б) $|\min(i,j)|_{i,j=1,n}$, в) $\left|\frac{(i+j)!}{i!j!}\right|_{i,j=1,n}$.