Алгебра 7

1. Умножение на комплексное число z задает линейное отображение $\mathbb{C}$ на $\mathbb{C}$ как двумерного векторного пространства над полем $\mathbb{R}$. Найдите матрицу этого отображения в естественных координатах, вычислите ее определитель.

2. Найдите собственные значения и собственные вектора матриц

$$\text{a) } R(t)\begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}, \qquad \text{b) } \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Докажите что матрица $R(t)$ удовлетворяет уравнению вида

$$\frac{d}{dt}R(t) = AR(t)$$

для некоторой постоянной матрицы A.

4. Найдите невырожденные матрицы $\Phi(t)$ такие что

$$\text{a) } \frac{d}{dt}\Phi(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\Phi(t), \qquad \text{b) } \frac{d}{dt}\Phi(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}\Phi(t)$$

5. Вычислите характерестический многочлен матрицы

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \end{pmatrix}$$