Алгебра 8

1. Вычислите дискриминанты многочленов а) ax^2+bx+c, б) x^3+px^2+qx+r.

2. Используя только свойства определителей, вычислите результанты многочленов а) $x-\alpha$ и ax^2+bx+c, б) $x-\alpha$ и $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots a_0$.

3. Пусть $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots a_0$ и $g(x)=b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots b_0$ – многочлены степеней n и m, $n\geq m$. Пусть $r(x)$ – остаток от деления f на g $f=qg+r$. Докажите что результант $\mathrm{Result}(f,g)$ многочленов f и g равен

a) $\pm b_m\mathrm{Result}(r,g)$ если $m=n$,

b) $\pm b_m^{n-m+1}\mathrm{Result}(r,g)$ для любых n и m.

4. Пусть $f(x,y)$ и $g(x,y)$ – многочлены от двух переменных. Докажите что их результант $\mathrm{Result}_x(f,g)$ как многочленов от x принадлежит идеалу (f,g) кольца многочленов от двух переменных, порожденному f и g.

5. Положим $s_n(x)=x_1^n+x_2^n+\cdots x_N^n$ -n-ая симметрическая функция Ньютона. Докажите следующие реккурентные соотношения

а) $s_j-\sigma_1s_{j-1}+\sigma_2s_{j-2}-\cdots+(-1)^{j-1}\sigma_{j-1}s_j;+(-1)^jj\sigma_j=0 \quad \text{if } j\leq N$

б) $s_j-\sigma_1s_{j-1}+\sigma_2s_{j-2}-\cdots++(-1)^j\sigma_Ns_{j-N}=0 \quad \text{if } j>N$.

6. Пусть L -векторное пространство над комплексными числами размерности n. Оно является векторным пространством $L^{\mathbb{R}}$ над вещественными числами путем "забывания"возможности умножения на невещественные числа. Вычислите размерность этого вещественного векторного пространства. $\mathbb{C}$-линейное отображение $A:L\to L$ является $\mathbb{R}$-линейным отображением $L^{\mathbb{R}}$ в себя. Вычислите определитель этого отображения вещественного пространства.