Алгебра 9

1. Рассмотрим пространство непрерывных функций на отрезке $[0, 2\pi]$ снабженное метрикой $\int_0^{2\pi} f(x)^2 d\,x$. Докажите, что набор функций $\sin(nx)$, $\cos(nx)$ является ортогональным. Вычислите длины этих векторов.

2. Докажите что

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{i^2} < \frac{\pi^2}{6}$$

3. Проведите процесс ортгонализации набора $1, x, x^2, x^3, x^4$ по отношению к квадратичной форме

$$Q(f) = \int_{-\infty}^{\infty} f^2(x) e^{-x^2} d\,x$$

(напомним, что $Q(1) = \sqrt{\pi}$)

4. Проведите процесс ортгонализации набора $1, x, x^2, x^3, x^4$ по отношению к квадратичной форме

$$\int_{-1}^{1} f^2(x) d\,x$$

5. Определим многочлены $T_n(x)$ условием $T_n(\cos(t)) = \cos(nt)$. Докажите, что многочлены $T_n(x)$ ортогональны относительно метрики

$$\int_{-1}^{1} f^2(x)(1 - x^2)^{\frac{1}{2}} d\,x$$

заметим, что с интегралом есть некоторые проблемы.

6. Найдите ортогональный базис для квадратичных форм

$$\text{a)} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \to 2x_1x_2 \quad \text{b)} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \to 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3.$$