Полупростые конечномерные ассоциативные алгебры и их представления

Эх, простота...

Вместо предисловия

Все нижеследующее я переписал (не всегда точно) из следующих книг, горячо рекомендуемых мной для домашнего чтения:

1. Герман Вейль. *Классические группы, их инварианты и преставления.* Москва, ГИИЛ, 1947. Гл. III.
2. Н.Г.Чеботарёв. *Введение в теорию алгебр.* ОГИЗ, 1949.
3. С.Ленг. *Алгебра.* Мир, 1968. Гл. XVII, XVIII.
4. И.Херстейн. *Некоммутативные кольца.* Мир, 1972. Гл. 3,4,5.
5. Ю.П.Размыслов. *Введение в теорию алгебр и их представлений.* Изд. МГУ, 1991.
6. В.В.Прасолов. *Задачи и теоремы линейной алгебры.* Наука, Физматлит, 1996. Гл. 7, §42.
7. Ж.П.Серр. *Линейные представления конечных групп.* Мир, 1970.
8. *Книга для чтения по алгебре.* Москва, ОНТИ, 1936. Гл. 10,11.

О. Шварцман

Лекция 1 6 сентября 2007 г.

Представления матричных алгебр

Приведем некоторые определения и простые факты, которые следует хорошо запомнить. Пусть A – ассоциативная алгебра над фиксированным полем K, $\mathrm{End}_K V$ – алгебра линейных преобразований линейного пространства V над полем K.

Определение 1.1. Гомоморфизм $f : A \longrightarrow \mathrm{End}_K V$ называется *представлением алгебры* A (в линейном пространстве V).

Определение 1.2. Если f – представление алгебры A в линейном пространстве V, то множество линейных преобразований

$$\mathrm{End}_A V = \{c \in \mathrm{End}_K V \mid f(a)c = c\, f(a) \ \ \text{для любого } a \in A\}$$

называется *централизатором представления* f.

Лемма 1. Централизатор $\mathrm{End}_A V$ является K-подалгеброй в $\mathrm{End}_K V$, которая содержит единицу.

Доказательство: упражнение.

Определение 1.3. Представление $f : A \longrightarrow \operatorname{End}_K V$ называется *неприводимым*, если

а) $f(A) \neq 0$

б) в пространстве V нет ненулевых собственных подпространств, инвариантных относительно действия алгебры A (т.е. если $W < V$ и $f(A)W < W$, то $W = 0$ или $W = V$).

Пример. Естественное представление алгебры матриц $M_n(K)$ в n-мерном линейном пространстве V является неприводимым (так называемое *тавтологическое* представление).

> *Лемма Шура о централизаторе.* Пусть $f : A \longrightarrow \operatorname{End}_K V$ – неприводимое представление алгебры A в конечномерном линейном пространстве V над алгебраически замкнутым полем K. Тогда $\operatorname{End}_A V = K \cdot 1$ (1 – единичная матрица), т.е. централизатор представления совпадает со скалярными операторами.

Доказательство. Пусть $c \in \operatorname{End}_A V$, $c \neq 0$. Тогда оператор $c : V \longrightarrow V$ обратим. В самом деле, подпространство $W = cV$ инвариантно под действием алгебры A: $f(A)W = f(A)\,cV = c\,f(A)V < cV = W$. Поэтому, ввиду неприводимости, $W = 0$ (но тогда c – нулевой оператор) или $W = V$, и тогда c обратим. Далее, так как $K < \operatorname{End}_A V$, то коммутативная алгебра $K[c]$ является конечным расширением поля K и сама является полем (почему?). Но поле K алгебраически замкнуто, и следовательно, $c \in K$. Лемма Шура доказана. $\square$

Замечание 1. Если не требовать алгебраической замкнутости K, то лемма Шура утверждает, что централизатор $\operatorname{End}_A V$ является алгеброй с делением над основным полем K (как это доказать?).

Замечание 2. (Ю.П.Размыслов) Можно не требовать конечномерности линейного пространства V, но тогда размерность V должна быть меньше мощности алгебраически замкнутого поля K.

Язык модулей

Для краткости удобно перейти на язык A-модулей. В дальнейшем A – ассоциативная K-алгебра с единицей 1.

Определения 1.4

а) Линейное пространство V над полем K называется *(левым) A-модулем*, если задано K-билинейное отображение $\cdot : A \times V \longrightarrow V$, которое удовлетворяет условию
$$(ab) \cdot v = a \cdot (b \cdot v) \quad (a, b \in A,\ v \in V)$$
(очень скоро эта точка исчезнет).

б) Линейное отображение $\varphi : V_1 \longrightarrow V_2$ называется *гомоморфизмом A-модулей*, если
$$\varphi(a \cdot v) = a \cdot \varphi(v).$$
Как всегда, можно говорить об изоморфизме, мономорфизме, эпиморфизме и эндоморфизме A-модулей.

в) Линейное подпространство W в A-модуле V называется A-*подмодулем*, если $AW < W$.

Говорят, что A-модуль V есть сумма своих подмодулей V_i, $i \in I$ (множество индексов), если любой элемент $v \in V$ представим в виде

$$v = v_{i_1} + v_{i_2} + \cdots + v_{i_k}, \quad v_{i_s} \in V_{i_s} \tag{$*$}$$

При этом V есть прямая сумма своих подмодулей V_i, если разложение $(*)$ однозначно. Если $|I| < \infty$, то пишут $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_k$.

Понятия "представление K-алгебры A в линейном пространстве V" и "(левый) A-модуль V" взаимозаменяемы. По каждому представлению $f : A \longrightarrow \operatorname{End}_K V$ строится левый A-модуль V согласно правилу

$$a\,v = f(a)\,v$$

Наоборот, каждый (левый) A-модуль V определяет представление f алгебры A в V, для которого

$$f(a)v \stackrel{\text{def}}{=} a\,v.$$

Поэтому все понятия, введенные для представлений: неприводимость, централизатор и т.д., – будут использоваться для A-модулей.

Определение 1.5. Неприводимый A-модуль называется *простым.*

Пример. Алгебра A является (левым) A-модулем: $a \cdot b = ab$ $(a, b \in A)$. В таком качестве она называется *регулярным* A-модулем.

Определение 1.6. A-модуль называется *полупростым*, если он раскладывается в прямую сумму своих простых подмодулей.

Комментарий к определению 1.6. Лемма Жордана-Гёльдера (она была сформулирована в одном из листочков с задачами) утверждает, что если

$$V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_n = U_1 \oplus \cdots \oplus U_s$$

– два разложения полупростого модуля V в прямую сумму простых модулей, то $n = s$ и при подходящей нумерации слагаемых V_j изоморфно U_j для всех j. Это простое замечание будет важно для дальнейшего.

Пополнив наш словарный запас, перейдем к содержательной части лекции.

> *Теорема Бернсайда о плотности.* Пусть $A < \operatorname{End}_K V$ – подалгебра алгебры линейных преобразований линейного пространства V над алгебраически замкнутым полем K, $\dim_K V > 1$. Если V – простой A-модуль, то $A = \operatorname{End}_K V$.

Можно сказать и так: если у конечномерной алгебры A над алгебраически замкнутым полем K есть точное неприводимое представление (*точность* представления $f:\ a \longrightarrow \operatorname{End}_K W$ означает, что f – мономорфизм), то $A \simeq M_n(K)$.

> *Обобщенная теорема Бернсайда.* Если у конечномерной ассоциативной алгебры A над полем K есть точное неприводимое представление в пространстве V, то алгебра A изоморфна некоторой полной матричной алгебре $M_n(D)$ над телом $D = \operatorname{End}_A V$.

Доказательство обобщенной теоремы Бернсайда остается для упражнения или самостоятельного чтения (см. книгу Ленга), а мы докажем (элементарно) теорему Бернсайда.

Доказательство. Если $x \in V$ и $x \neq 0$, то Ax – инвариантное подпространство, а потому $Ax = V$ ($Ax \neq 0$, так как в этом случае Kx – инвариантное подпространство). Следовательно, матричная алгебра A транзитивно действует на $V - \{0\}$. Предположим, что алгебра A содержит оператор P ранга 1, проецирующий всё V на одномерное подпространство Ky, $y \in V - \{0\}$. Такой линейный оператор P записывается в виде $Px = \ell(x)y$, где $\ell \in V^*$ (V^* – двойственное к V пространство линейных функционалов на V). Покажем, что в таком случае алгебра A содержит все операторы ранга 1.

С этой целью рассмотрим оператор Pa, где $a \in A$. Это оператор ранга $\leqslant 1$, лежащий в A. Следовательно, $Pa(x) = \ell_a(x)y$, где $\ell_a \in V^*$. Заметим, что все такие ℓ_a образуют в V^* линейное подпространство (почему?). Мы утверждаем, что это линейное подпространство есть всё V^*. В противном случае в пространстве V найдется ненулевой вектор v, аннулируемый всеми линейными функционалами ℓ_a, $a \in A$. Это означало бы, что $Pa(v) = 0$ для всех $a \in A$, или что $V = Av$ лежит в $(\dim V - 1)$-мерном ядре оператора P, что явно не так. Итак, мы показали, что для любой линейной функции $\ell \in V^*$ существует такой элемент $a \in A$, что $Pa\,(x) = \ell(x)y$ для всех $x \in V$. Теперь рассмотрим любой элемент $b \in A$ и заметим, что $b\,Pa\,(x) = b(\ell(x)y) = \ell(x)\,b(y)$, и что $b(y)$ пробегает всё V, когда b пробегает A, согласно нашему стартовому наблюдению. Тем самым, среди операторов вида APA есть все операторы ранга $\leqslant 1$. Но любой линейный оператор есть линейная комбинация операторов ранга 1. Получается, что $A = \operatorname{End}_K V$.

Остается доказать, что алгебра A содержит хотя бы один оператор ранга 1.

Обозначим через L ненулевой оператор минимального ранга $d > 1$ из A. По определению ранга, найдутся два вектора v_1 и v_2 из V такие, что векторы Lv_1 и Lv_2 линейно независимы. По замечанию о транзитивности, $a\,Lv_1 = v_2$ для некоторого оператора $a \in A$. Тогда векторы $L\,a\,Lv_1 = Lv_2$ и Lv_1 линейно независимы, т.е. $LaL - \lambda L \neq 0$ при всех $\lambda \in K$. Ограничим оператор $La - \lambda E$ на инвариантное подпространство $\operatorname{Im} L$, и подберем λ так, чтобы это ограничение стало вырожденным на подпространстве $\operatorname{Im} L$ (этого можно добиться, потому что поле K алгебраически замкнуто). Тогда

$$0 < \operatorname{rk}(LaL - \lambda L) = \operatorname{rk}(La - \lambda E)L < \operatorname{rk}(LE) = d,$$

то есть в алгебре A нашелся элемент $LaL - \lambda L$, ранг которого меньше d. Полученное противоречие показывает, что $d = 1$. $\square$

Упражнение. Упростите, насколько это возможно, элементарное доказательство теоремы Бернсайда.

В дальнейшем слово "идеал" будет означать двусторонний идеал. Помимо двусторонних, существуют левые и правые идеалы.

Определение 1.7. Алгебра A называется *простой*, если $A\,A \neq 0$ и в ней отсутствуют идеалы, отличные от 0 или A.

Теорема Бернсайда интересна сама по себе. С ее помощью мы сейчас получим таинственное утверждение о структуре простой K-алгебры A.

> *Центральная теорема.* Простая конечномерная ассоциативная алгебра A над полем K изоморфна некоторой полной матричной алгебре $M_n(D)$ над некоторым телом D над K.

Замечание. Число n и тело D определяются по алгебре A однозначно.

Доказательство. Мы докажем Центральную теорему только для алгебраически замкнутого поля K. Рассмотрим регулярный A-модуль A. Обозначим через V минимальный ненулевой A-подмодуль в A. Возможны два случая:

1. $AV = 0$. Тогда элементы вида $\{\sum v_i a_i,\ v_i \in V,\ a_i \in A\}$ образуют ненулевой идеал J в A. По причине простоты A, $J = A$. Но тогда $AA = A \cdot \{\sum v_i a_i\} = \{\sum (Av_i) a_i\} = 0$, что противоречит простоте A.

2. $AV \neq 0$. В этом случае V – простой A-модуль, а индуцированное им представление $f : A \longrightarrow \operatorname{End}_K V$ является точным, так как $\operatorname{Ker} f = 0$ (ведь ядро гомоморфизма – идеал!). Следовательно, f – точное неприводимое представление алгебры A над алгебраически замкнутым полем K. По теореме Бернсайда, $A \simeq M_n(K)$. $\square$

Замечание. Обобщенная теорема Бернсайда позволяет на последнем шаге сделать вывод о том, что $A \simeq M_n(D)$, где $D = \operatorname{End}_A V$.