Представления матричных алгебр

Продолжая изучение матричных алгебр, опишем все модули над полной матричной алгеброй $M_n(K)$.

> *Теорема 1.* Отождествим полную матричную алгебру $A = M_n(K)$ с алгеброй $\mathrm{End}_K V$ эндоморфизмов линейного пространства V над полем K. Тогда любой $M_n(K)$-модуль W есть прямая сумма некоторого числа простых $M_n(K)$-модулей V.

Замечание. Простота модуля V сомнений не вызывает.

Доказательство. Пространство $M_n(K)$ есть прямая сумма подпространств S_i, состоящих из матриц, у которых столбцы с номерами $1, \ldots, i-1,\ i+1, \ldots, n$ нулевые. Ясно, что подпространство S_i является $M_n(K)$-модулем, изоморфным модулю V (почему?). Далее, для любого ненулевого элемента $w \in W$ рассмотрим отображение $\varphi_i : S_i \longrightarrow S_i w$, для которого $\varphi_i(s) = sw$. Если $S_i w$ окажется ненулевым подпространством, то $\mathrm{Ker}\, \varphi_i = 0$ (в противном случае $\mathrm{Ker}\, \varphi_i$ – собственный $M_n(K)$-подмодуль простого модуля S_i), т.е. φ_i – изоморфизм $M_n(K)$-модулей. После этих замечаний приступим к доказательству.

Пусть $e_1, \ldots, e_t$ – базис линейного пространства W. По условию, единичная матрица $E \in M_n(K)$ тождественно действует в W. Поэтому W является суммой линейных подпространств $S_i e_j$. Но каждое такое ненулевое подпространство является простым модулем, а потому оно либо целиком поглощается любым другим подмодулем, либо имеет с ним нулевое пересечение. Отсюда моментально выводится (как?), что модуль W есть прямая сумма некоторого числа ненулевых подмодулей $S_i e_j$. Наше утверждение доказано. □

Упражнение. Регулярный $M_n(K)$-модуль изоморфен модулю $nV = \underbrace{V \oplus \cdots \oplus V}_{n\ \text{раз}}$.

Итак, с представлениями полной матричной алгебры $A = M_n(K)$ все обстоит естественно и просто: любой A-модуль W (с условием $1 \cdot w = w$) есть прямая сумма простых A-модулей V. Простой A-модуль V реализует тавтологическое представление алгебры $M_n(K)$: матрицы действуют слева на вектор-столбцы, как и сто лет назад.

Дальнейший план таков: мы введем в рассмотрение один полезный класс алгебр. Групповая алгебра конечной группы над полем характеристики 0 попадает в этот класс. Мы покажем, что в этом классе любая алгебра A представима в виде прямой суммы простых алгебр. Ограничившись случаем алгебраически замкнутого поля K, $\mathrm{char}\, K = 0$, мы получаем разложение алгебры A над алгебраически замкнутым полем характеристики 0 в прямую сумму полных матричных алгебр. После чего уже несложно разобраться с устройством A-модулей в этом частном случае.

Удобные алгебры

Определение 2.1. Рассмотрим регулярный модуль A, и в пространстве A над полем K зададим каноническую билинейную форму $\langle a\,, b\rangle \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{tr}(ab)$ (напомним, что в левой части a и b – элементы алгебры A, а в правой части они же рассматриваются как линейные операторы левого сдвига $x \longrightarrow ax$). Отметим, что форма $\langle\,,\,\rangle$ симметрична и удовлетворяет равенству $\langle ab\,, c\rangle = \langle a\,, bc\rangle$ для любых элементов $a, b, c \in A$. Алгебра A называется *удобной*, если билинейная форма $\langle a\,, b\rangle = \mathrm{tr}(ab)$ невырождена.

Упражнение. Показать, что полная матричная алгебра $M_n(K)$ удобна.

Центральная лемма. Если I – идеал в удобной алгебре A, то ортогональное дополнение $I^\perp = \{a \in A \mid \langle a\,,\, i\rangle = 0 \text{ для любых } i \in I\}$ есть идеал.

Доказательство. Необходимо проверить, что из $a \in I^\perp$ следует, что $bac \in I^\perp$ для любых $b, c \in A$. Имеем:

$$\langle bac\,,\, i\rangle = \langle ba\,,\, ci\rangle = \langle ba\,,\, i'\rangle = \langle i'\,,\, ba\rangle = \langle i'b\,,\, a\rangle = \langle i''\,,\, a\rangle = \langle a\,,\, i''\rangle = 0. \quad \square$$

Упражнение. Не предполагая форму $\langle\, ,\, \rangle$ невырожденной, показать, что ее ядро $\mathrm{Rad}\langle\, ,\, \rangle$ есть идеал в A.

Большая Теорема. Удобная алгебра A есть прямая сумма своих ненулевых минимальных идеалов, каждый из которых есть простая алгебра.

Доказательство. Пусть I – минимальный (по включению) ненулевой идеал в A (если алгебра A конечномерна, то такой идеал существует). В силу минимальности идеала I возможны два случая:

а) $I \cap I^\perp = \{0\}$

б) $I \cap I^\perp = I$

На первом этапе доказательства покажем, что случай б) невозможен. Условие б) означает, что подпространство I изотропно относительно формы $\langle\, ,\, \rangle$. Покажем, что $I \cdot I = 0$. В самом деле, $\langle i_1 i_2\,,\, a\rangle = \langle i_1\,,\, i_2 a\rangle = \langle i_1\,,\, i_2'\rangle = 0$, т.е. $i_1 i_2 \in \mathrm{Rad}\langle\, ,\, \rangle$ для любых $i_1, i_2 \in I$. По условию $\mathrm{Rad}\langle\, ,\, \rangle = 0$. Следовательно, $I^2 = 0$.
Пусть $i \in I$. Тогда для любого $a \in A$ элемент ia нильпотентен: $(ia)^2 = ia{\cdot}ia = 0$ (т.е. элемент ia записывается нильпотентной матрицей в регулярном представлении). Но след нильпотентной матрицы равен 0. Таким образом, $\langle i\,,\, a\rangle = \mathrm{tr}(ia) = 0$ для любого элемента $i \in I$ и $a \in A$. Получается, что $i \in \mathrm{Rad}\langle\, ,\, \rangle$, то есть $i = 0$. Это противоречит выбору идеала I.

Вернемся к случаю а). Если $I \cap I^\perp = \{0\}$, то линейное пространство A есть прямая сумма $I \oplus I^\perp$. Кроме того, в этом случае произведение идеалов $I\,I^\perp = 0$ (почему?). Поэтому $(i_1 + j_1) \cdot (i_2 + j_2) = i_1 i_2 + j_1 j_2$ $(i_1,\, i_2 \in I,\ j_1,\, j_2 \in I^\perp)$. Это показывает, что алгебра A есть прямая сумма своих идеалов I и $I^\perp$, причем алгебра I проста (почему?), а алгебра $I^\perp$ удобна (почему?). Теперь искомое разложение алгебры A (в прямую сумму минимальных идеалов) следует из индуктивных соображений. Большая теорема доказана. $\square$

Важный пример. Пусть G – группа. Линейное пространство $K[G] = \{\sum a_i g_i \mid a_i \in K,\ g_i \in G\}$, базис которого составляют элементы группы G с операцией умножения

$$\sum a_i g_i \ \cdot\ \sum a_i' g_i' = \sum a_i \cdot a_i' (g_i \cdot g_i')$$

называется *групповой алгеброй* группы G над полем K.

Лемма. Если порядок группы G равен n, то след $\mathrm{tr}\, g$ элемента $g \in G$ в регулярном представлении равен

$$\begin{cases} n, \text{ если } g = 1 \\ 0, \text{ если } g \neq 1 \end{cases}$$

Доказательство: упражнение.

Лемма. Билинейная форма $\langle\, ,\, \rangle_{K[G]}$ невырождена на групповой алгебре тогда и только тогда, когда $\operatorname{char} K$ не делит порядок n группы G.

Доказательство. Имеем: $\langle \sum a_i g_i\, ,\, g_j^{-1}\rangle = \operatorname{tr}\left(\sum a_i (g_i g_j^{-1})\right) = \sum a_i \operatorname{tr}(g_i g_j^{-1}) = n a_j$. Таким образом, если характеристика поля K не делит n, а элемент $t = \sum a_i g_i$ принадлежит $\operatorname{Rad}\langle\, ,\, \rangle$, то $n a_j = 0$, то есть $a_j = 0$, то есть $t = 0$. Если же известно, что форма $\langle\, ,\, \rangle$ вырождена и ненулевой элемент $t = \sum a_i g_i$ лежит в ядре, то это означает, что $n a_i = 0$ для всех i, что возможно только если $\operatorname{char} K$ делит n (среди чисел a_i есть ненулевые!). $\square$

Следствие. Групповая алгебра $K[G]$ конечной группы над алгебраически замкнутым полем K, характеристика которого не делит порядок группы, есть прямая сумма матричных алгебр над полем K, т.е.

$$K[G] = \bigoplus_{i=1}^{s} M_{n_i}(K)$$

В частности, $\dim K[G] = |G| = \sum_{i=1}^{s} n_i^2$.

Доказательство: упражнение.

На очереди вопрос: как устроены A-модули, если алгебра A есть прямая сумма полных матричных алгебр над полем K?

Теорема 2. Пусть $A = \bigoplus_i M_{n_i}(K)$, V_i – линейное пространство вектор-столбцов высоты n_i над полем с естественным действием алгебры $M_{n_i}(K)$: умножение столбца на матрицу. Если M – произвольный A-модуль, то $M = \oplus m_i V_i$, т.е. любой A-модуль M есть прямая сумма простых модулей V_i, встречающихся с кратностью m_i ($m_i V_i = \underbrace{V_i \oplus \cdots \oplus V_i}_{m_i \text{ раз}}$).

Доказательство. Через e_i обозначим единицу алгебры $A_i = M_{n_i}(K)$. Заметим, что $1 = \sum e_i$, $e_i^2 = e_i$, $e_i e_j = e_j e_i = 0$, $i \neq j$ (почему?). Следовательно, $A_i = A e_i$ (почему?). Кроме того, все e_i лежат в центре алгебры A (на самом деле, как легко понять, центр алгебры A есть линейная оболочка e_i). В частности, $A e_i = e_i A = A_i$ в A-модуле M. Рассмотрим ненулевые подмодули M_i вида $e_i M$. Покажем, что а) модуль M есть прямая сумма ненулевых подмодулей M_i; б) каждый из ненулевых подмодулей M_i есть точный A_i-модуль и $A_j M_i = 0$, если $j \neq i$. Из этих двух утверждений и теоремы 1 непосредственно следует теорема 2.

Доказательство а). Имеем

$$1 \cdot m = m = (\sum e_i) m = \sum e_i m = \sum m_i, \quad m_i \in M_i.$$

Покажем, что представление в виде суммы подмодулей M_i однозначно, то есть докажем невозможность нетривиального равенства вида $\sum e_i m_i' = 0$, $m_i' \in M$. В самом деле, применяя к обеим частям этого равенства e_j, получаем, что $e_j(\sum e_i m_i') = \sum (e_j e_i) m_i' = e_j^2 m_j' = e_j m_j' = 0$, т.е. выходит, что все слагаемые нулевые. Противоречие.

Доказательство б). Имеем при $i \neq j$: $A_j M_i = Ae_j e_i M = A(e_j e_i)M = 0 \cdot M = 0$. С другой стороны, $e_i(e_i m) = e_i^2 m = e_i m$. Следовательно, представление простой алгебры A_i в пространстве $M_i = e_i M$ является точным (при этом единица e_i алгебры A_i действсвует тождественно). $\square$

> *Следствие.* Пусть $A = \oplus M_{n_i}(K)$. Тогда для регулярного A-модуля A указанное в теореме 2 разложение выглядит так: $A = \oplus n_i V_i$. (Почему?)

Применительно к случаю групповой алгебры конечной группы G над алгебраически замкнутым полем K характеристики 0 теорема 2 означает, что а) любое представление группы G есть прямая сумма неприводимых представлений; б) кратность вхождения каждого неприводимого представления в пространстве V_i в регулярное представление группы G равна размерности $n_i = \dim_K V_i$.

В качестве несложного упражнения отметим следующий факт: число неприводимых представлений конечной группы G над алгебраически замкнутым полем K характеристики 0 (или характеристики $p > 0$, не делящей $|G|$) равно $\{$размерности над K центра $Z(K[G])$ групповой алгебры$\}$ = $\{$числу классов сопряженных элементов в группе $G\}$.

Теория удобных алгебр над полями беспомощна в деле описания неприводимых представлений конкретных групп. Исторически первым был конструктивный подход, использующий усреднение по группе и теорию характеров, наряду с тензорным произведением и индуцированием. Об этом поговорим в следующих лекциях.