Характеры

Пусть $f: A \longmapsto \mathrm{End}_K V$ – представление алгебры A.

Определение. K-значная функция $\mathrm{tr}_f(a) = \mathrm{tr}(f(a))$ на алгебре A называется *характером* (*следом*) представления f.

Замечание. Если речь идет о представлении $\rho: G \longrightarrow GL(V)$ группы G над полем K, то характер - это функция $\mathrm{tr}(\rho(g))$ на группе G.

Роль характера видна из следующего общего утверждения.

> *Теорема 4.1.* Предположим, что A – удобная (полупростая) алгебра над полем нулевой характеристики K. Два представления f_1 и f_2 алгебры A эквивалентны тогда и только тогда, когда $\mathrm{tr}_{f_1}(a) = \mathrm{tr}_{f_2}(a)$ для любого $a \in A$.

Доказательство. В одну сторону доказывать нечего: если представления эквивалентны, то их характеры совпадают. Наоборот, пусть $\mathrm{tr}_{f_1}(a) = \mathrm{tr}_{f_2}(a)$, $a \in A$. Удобная алгебра A есть прямая сумма своих простых подалгебр, $A = A_1 \oplus \cdots \oplus A_s$. Рассмотрим соответствующее центральное разложение единицы алгебры A:

$$1 = e_1 + \cdots + e_s$$

Через V_i обозначим простой A_i-модуль и разложим модули M и N, соответствующие представлениям f_1 и f_2, в прямую сумму простых:

$$M = \oplus\, k_i V_i \qquad N = \oplus\, \ell_i V_i$$

Тогда $\mathrm{tr}_{f_1}(e_i) = k_i d_i$, а $\mathrm{tr}_{f_2}(e_i) = \ell_i d_i$, где $d_i = \dim_K V_i$ (почему?). Из равенства следов вытекает, что $k_i = \ell_i$, то есть представления f_1 и f_2 эквивалентны. $\square$

Замечание. Доказательство показывает, что достаточно требовать совпадения следов на центре алгебры A.

Вернемся к представлениям групп и обсудим еще раз Мать-Лемму Шура.

Мать-Лемма Шура

Представления группы G в линейных пространствах над данным полем K образуют категорию, морфизмами которой служат *сплетающие операторы* – операторы, перестановочные с действием группы в пространствах представлений. Множество операторов, сплетающих представления T_1 и T_2 группы G в пространствах V_1 и V_2 соответственно, образуют K-линейное пространство, которое мы обозначим через $\mathrm{Hom}_G(V_1, V_2)$. Итак,

$$c \in \mathrm{Hom}_G(V_1, V_2) \iff c \circ T_1(g) = T_2(g) \circ c, \quad c: V_1 \longrightarrow V_2$$

Размерность пространства $\mathrm{Hom}_G(V_1, V_2)$ обозначается через $c(T_1, T_2)$ и называется *числом сплетения* представлений.

Пусть $\widehat{G} = T_1, \ldots, T_k$ – конечное число классов неприводимых представлений группы G, и пусть представления P и Q разлагаются на неприводимые следующим образом:

$$P = \sum p_i T_i, \quad Q = \sum q_i T_i$$

Тогда Мать-Лемма Шура утверждает, что над полем $\mathbb{C}$

$$c(P, Q) = \sum p_i q_i$$

Упражнение. Докажите это утверждение.

Матричные элементы неприводимых комплексных представлений конечной группы G

Рассмотрим два неприводимых представления P и Q группы G в пространствах V_P и V_Q соответственно. Если L – <u>любой</u> оператор из V_P в V_Q, то с помощью усреднения по группе G из него можно построить сплетающий оператор:

$$\overline{L} = \frac{1}{|G|} \sum Q(g)\, L\, P(g^{-1}) \qquad \text{(задача 3.2)}$$

Если представления P и Q эквивалентны, то $\overline{L} = 0$.
На языке матричных элементов это, конечно, означает, что

$$\sum_{g \in G} q_{ij}(g)\, p_{uw}(g^{-1}) = 0 \quad \text{для любых } i, j, u, w \qquad (1)$$

Выбрав базис в V_P так, чтобы матрицы $P(g)$ были унитарны (задача 3.4), перепишем равенство (1) в виде

$$\sum_{g \in G} q_{ij}(g)\, \overline{p_{uw}}(g) = 0 \qquad (1')$$

Если же $P = Q$ (представления P и Q эквивалентны), то $\overline{L}$ обязан быть скалярным оператором. Ясно, что $\operatorname{tr} \overline{L} = \operatorname{tr} L$. Поэтому

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} P(g)\, L\, \overline{P(g)} = \frac{\operatorname{tr} L}{\dim V_P} \cdot E,$$

что в терминах матричных элементов означает, что

$$\frac{1}{|G|} \sum p_{ij}(g)\, \overline{p_{uw}(g)} = \frac{1}{\dim V_P} \delta_{ij} \delta_{jw} \qquad (2')$$

Полученные соотношения $(1')$ и $(2')$ решают задачу 3.5 и называются *соотношениями ортогональности* матричных элементов неприводимых представлений. Если, решив задачу 3.6, убедиться в полноте системы матричных элементов неприводимых представлений, то становится очевидным тождество Бернсайда

$$|G| = \sum (\dim T_i)^2$$

Упражнение. Пространство $\mathbb{C}$-значных функций на группе G, рассматриваемое как левый G-модуль: $(gf)(x) = f(xg)$, называется *регулярным G-модулем*, или *регулярным представлением* R группы G.
Доказать, что $c(R, T) = \dim T$ для любого представления T группы G.

Соотношение ортогональности матричных элементов неприводимых представлений конечной группы G над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$ влечет соотношения ортогональности между характерами представлений. Рассмотрим это детальнее.

Соотношение ортогональности для характеров

Если P – представление группы G в пространстве V_P, то

$$\mathrm{tr}_P(g) = \sum_{i=1}^{\dim V_P} p_{ii} = \sum_{1}^{d_P} p_{ii}(g).$$

Кроме того, характеры постоянны на классах сопряженных элементов группы G. Если P и Q – два различных унитарных неприводимых представления группы G, то из ортогональности их матричных элементов следует (формула $1'$), что

$$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} \mathrm{tr}_P(g)\,\overline{\mathrm{tr}_Q(g)} = 0 \tag{3}$$

Если через $C_i,\ \ i = 1, \ldots, s$ обозначить классы сопряженных элементов в группе G и выбрать элементы $g_i \in C_i$, то соотношение (3) перепишется в виде

$$\frac{1}{|G|}\sum_{1}^{s} |C_i|\,\mathrm{tr}_P(g_i)\,\overline{\mathrm{tr}_Q(g_i)} = 0 \tag{$3'$}$$

Предположим теперь, что $P = Q$. Тогда из соотношений ортогональности $(2')$ получаем, что

$$\frac{1}{|G|}\sum_{1}^{s} |C_i|\,\mathrm{tr}_P(g_i)\,\overline{\mathrm{tr}_P(g_i)} = 1. \tag{$4'$}$$

С другой стороны, мы знаем, что различных неприводимых представлений $T_1, \ldots, T_s$ у группы G столько же, сколько классов сопряженных элементов, то есть s. Поэтому, обозначив через tr_i след неприводимого представления T_i, можно рассмотреть $s \times s$ матрицу $\chi = (\mathrm{tr}_i(g_j))$. Тогда полученные соотношения $(3')$ и $(4')$ просто означают, что матрица χ такова, что $\chi\, H\, \overline{\chi}^t = E$, где H – диагональная матрица $\mathrm{diag}(\frac{|C_1|}{|G|}, \ldots, \frac{|C_s|}{|G|})$. Но тогда $H^{-1} = \overline{\chi}^t \chi$, то есть

$$\sum_{k=1}^{s} \mathrm{tr}_k(g_\ell)\,\overline{\mathrm{tr}_k(g_m)} = \begin{cases} 0, & \ell \neq m \\ \frac{|G|}{|C_\ell|}, & \ell = m \end{cases} \tag{5}$$

Полученные нами соотношения (5) называются ортогональными соотношениями между характерами.

Слабое условие делимости

Речь идет о следующей теореме.

> *Теорема 4.2.* Размерность d_ℓ неприводимого комплексного представления T_ℓ группы G делит порядок группы.

Доказательство. Предварительно установим следующий факт.

> *Лемма.* Число $\frac{|C_i|}{d_\ell}\operatorname{tr}_\ell(g_i)$ является целым алгебраическим.

Доказательство. Рассмотрим в групповой алгебре $\mathbb{C}[G]$ группы G элемент $\widehat{C}_j = \sum_{g\in C_j} g$. Заметим, что элемент $\widehat{C}_j$ лежит в центре $Z(\mathbb{C}[G])$ групповой алгебры. Кроме того,

$$\widehat{C}_j \cdot \widehat{C}_i = \sum_{k=1}^{s} a_{ji}^k \widehat{C}_k, \text{ где коэффициенты } a_{ji}^k \in \mathbb{Z} \text{ (почему?)}$$

Если к обеим частям этого равенства «применить»неприводимое представление T_ℓ, то получим

$$T_\ell(\widehat{C}_j)\, T_\ell(\widehat{C}_i) = \sum_{k=1}^{s} a_{ji}^k T_\ell(\widehat{C}_k) \tag{6}$$

Так как представление T_ℓ неприводимо, а элементы $\widehat{C}_m$ лежат в центре групповой алгебры, то Мать-Лемма Шура говорит, что $\widehat{C}_j = \lambda_j E$, причем $\lambda_j = |C_j|\frac{\operatorname{tr}_\ell(g_j)}{d_\ell}$ (почему?). Далее, из (6) следует, что $\lambda_j\,\lambda_i = \sum a_{ji}^k \lambda_k$ с целыми a_{ji}^k. Следовательно, все $\lambda_i = |C_i|\frac{\operatorname{tr}_\ell(g_j)}{d_\ell}$ – целые алгебраические числа (этот факт интенсивно обсуждался в прошлом семестре). Лемма доказана. □

Возвращаясь к доказательству теоремы, разделим обе части соотношения $(4')$ на d_P. Получим

$$\sum \frac{|C_i|\operatorname{tr}_P(g_i)}{d_P}\overline{\operatorname{tr}_P(g_i)} = \frac{|G|}{d_P} \tag{7}$$

Из доказанной леммы и того факта, что след любой матрицы комплексного представления конечной группы является целым алгебраическим числом (почему?), следует, что левая часть равенства (7) – целое алгебраическое число. Таким образом, рациональное число $\frac{|G|}{d_P}$ получилось целым алгебраическим. Значит, оно целое. Теорема 4.2 доказана. □