О полупростых модулях над алгебрами

Модуль M называется *полупростым*, если он изоморфен прямой сумме простых модулей.

I. Доказать равносильность следующих условий:

1) Модуль M полупрост
2) $M = \sum M_i$, где M_i – простые подмодули в M (сумма не прямая!)
3) у всякого подмодуля есть дополнение
4) у всякого простого подмодуля есть дополнение

(Указание: полезно вести индукцию по длине ряда Жордана-Гёльдера.)

II. Показать, что всякий подмодуль и фактормодуль полупростого модуля полупрост.

Алгебра называется *полупростой*, если если ее регулярный модуль полупрост. Следующие задачи можно решать самостоятельно, а можно самостоятельно читать их решения в самых разных книгах, рассчитанных на законченных алгебраистов.

III. Если I – минимальный (левый) идеал в алгебре A, то либо $I^2 = 0$, либо $I = Ae$, где $e^2 = e$ (лемма Брауэра).

Идеал (правый, левый, двусторонний) $I < A$ называется *нильпотентным*, если $I^m = 0$ для некоторого натурального $m > 1$.

IV. Следующие условия эквивалентны:

1) алгебра A полупроста
2) всякий левый идеал в A имеет вид Ae, где e – идемпотент (т.е. $e^2 = e$).
3) всякий ненулевой идеал в Aсодержит ненулевой идемпотент
4) в алгебре A нет ненулевых нильпотентных идеалов
5) в алгебре A нет ненулевых нильпотентных левых идеалов

V а. Коммутативная алгебра полупроста тогда и только тогда, когда в ней нет нильпотентных элементов.

V б. Если поле K алгебраически замкнуто, то всякая коммутативная полупростая K-алгебра изоморфна K^n.

VI. Центр полупростой алгебры полупрост.

VII. Алгебра A полупроста тогда и только тогда, когда у нее есть точный полупростой модуль. (Модуль M называется *точным*, если его аннулятор $\operatorname{Ann} M = \{a \in A \mid aM = 0\}$ равен 0).

VIII. Алгебра $M_n(D)$, где D – тело, полупроста.

IX. В алгебре $A = M_n(D)$ нет идеалов, отличных от 0 и A.