13.09.2007.

Листок №2

Векторные пространства и матрицы над телами

Пусть D конечномерное тело над K, V – конечномерный левый D-модуль. Тогда V называется (конечномерным) векторным пространством над телом D.

Задача 1. Всякий простой D-модуль изоморфен регулярному.

Задача 2. Векторное пространство над D – полупростой модуль.

Задача 3. Всякое векторное пространство над D изоморфно $D^n = \underbrace{D \oplus \ldots \oplus D}_{n}$ (прямая сумма регулярных модулей). Число n определено однозначно и называется размерностью $\mathrm{dim_D\, V}$.

Алгебра эндоморфизмов V над D изоморфна алгебре $M_n(D)$. (элементы V удобно отождествлять с вектор-строчками $(x_1, \ldots, x_n)$, $x_i \in D$, на которые скаляры из D действуют слева, а матрицы действуют справа обычным образом).

Задача 4. Всякий модуль над алгеброй $A = M_n(D)$ полупрост.

Задача 5. Всякий простой A-модуль изоморфен $V = D^n$, а регулярный A-модуль изоморфен $\underbrace{V \oplus \ldots \oplus V}_{n} = nV$.

Примеры тел

Напомним, что $A = \left(\frac{a,b}{K}\right)$ обозначает четырехмерную алгебру A над полем K с умножением, заданным условиями
$i^2 = a$, $j^2 = b$ $\qquad ij = -ji = k \qquad$ $(1, i, j, k$ – базис A над $K)$.

Задача 6. Алгебра $\left(\frac{a,b}{K}\right)$ проста и её центр есть K.

Задача 7. Если простое $p \equiv 3(\mathrm{mod} 4)$, то $\left(\frac{-1,p}{Q}\right)$ – алгебра с делением.

Задача 8. Две алгебры из задачи 7 не изоморфны при различных p, q.

Примеры групповой алгебры

Задача 9. Если $\mathrm{char} K \neq 2$, а G – группа Клейна $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$, то $K[G] \simeq K \oplus K \oplus K \oplus K$.

Задача 10. Если H – группа кватернионов $\{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$, то $R[H] \simeq H \oplus R^4$.