20.09.2007.

Листок №3

Примеры конечномерных комплексных представлений конечных групп

Сводка основных результатов

1) Всякое представление есть прямая сумма неприводимых
2) Число различных неприводимых представлений равно числу классов сопряженных элементов группы
3) Размерности d_i неприводимых представлений и порядок группы $|G|$ связаны
а) тождеством Бернсайда
$\sum {d_i}^2 = |G|$
б) "слабым" свойством делимости
$\frac{|G|}{d_i} \in \mathbb{Z}$
(по поводу "сильного" свойства делимости смотри Ленг или Серр)

Задача 1. Найти явный вид всех неприводимых представлений группы:
а) Z_n
б) $Z_2 \times Z_2$
в) группы кватернионов
г) группы диэдра D_n
д) группы собственных вращений тетраэдра
е) группы $\mathbb{Z}_{n_1} \times \mathbb{Z}_{n_2} \times \ldots \times \mathbb{Z}_{n_s}$

Задача 2. (Конструкция сплетающего оператора)
Пусть $\rho_1\colon\ G \to GL(V_1)$ и $\rho_2\colon\ G \to GL(V_2)$ два представления группы G и $l\colon\ V_1 \to V_2$ – произвольный линейный оператор. Показать, что линейный оператор $\widehat{l}$, полученный "усреднением" l, сплетает представления ρ_1 и ρ_2:
$\widehat{l} = \frac{1}{|G|} \sum\limits_{g \in G} \rho_2(g) \cdot l \cdot \rho_1(g^{-1})$

Задача 3. Пусть группа G действует в линейном пространстве V с помощью представления ρ. Тогда оператор $p = \frac{1}{|G|} \sum\limits_{g \in G} \rho(g)$ является проектором на подпространство V^G, состоящее из неподвижных относительно G векторов

Задача 4. Всякое представление эквивалентно унитарному (т.е. в подходящем базисе записывается унитарными матрицами).

Задача 5. Используя конструкцию задачи 2 и результат задачи 4, показать, что матричные элементы унитарных неприводимых представлений образуют ортогональную систему в гильбертовом пространстве $L^2(G)$ функций на G со скалярным произведением
$\langle f_1, f_2 \rangle = \frac{1}{|G|} \sum f_1(g) \overline{f_2(g)}$

Задача 6. Доказать полноту системы матричных элементов.

Преобразование Фурье на группе G

Пусть $\widehat{G} = \{T_\lambda\}$ множество (классов эквивалентности) неприводимых представлений группы G. Преобразование Фурье на конечной группе G ставит в соответствие каждой функции f на G операторную функцию $\widehat{f}$ на $\widehat{G}$ по формуле
$\widehat{f}(\lambda) = \sum\limits_{g \in G} f(g) T_\lambda(g)^* \ \ (s^* = \overline{s}^t)$
Задача 7. Указать явный вид преобразования Фурье на группе Z_n, $Z_2 \oplus Z_2$

Задача 8*.
1) Доказать, что преобразование Фурье устанавливает изоморфизм алгебр $C[G]$ и $\oplus M_{d_\lambda}(C)$ $(d_\lambda = \dim_C T_\lambda)$
2) Найти явный вид формулы обращения.