Повторный экзамен по алгебре

1. Доказать, что если D_1 и D_2 – такие центральные тела над K, что $\dim_K D_1$ и $\dim_K D_2$ взаимно-просты, то $D_1 \bigotimes_K D_2$ есть тело.

2. $K = \mathbb{Z}_2(t)$ – поле рациональных функций над полем из двух элементов, $A = K[X]/(x^4 - t^2)$. Найти $R = \mathrm{rad} A$ и A/R.

3. Пусть G – группа сохраняющих ориентацию самосовмещений додекаэдра D. Разложить на неприводимые естественное представление группы G в пространстве

а) комплекснозначных функций на множестве грани D

б) комплекснозначных функций на множестве вершин D.

4. Пусть в группе G есть такой класс сопряженных элементов C, что $|C|$ взаимно просто с размерностью неприводимого представления T группы G. Тогда либо все матрицы

$T(g)$ $(g \in C)$ скалярные, либо $\mathrm{Tr}\, T(g) = 0$ $(g \in C)$.

5. Используя 4 (но не более), показать, что в природе не существует простой группы порядка 70 (теорема Каца-Мичурина о юбилеях).