Математический анализ, I курс, 2007/08 уч.г.
Листок N1, 12 сентября 2007 г.

1. Пусть $p > 0$. Для точек $A_i = (x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2$, $i = 1, 2$, положим

$$\rho_p(A_1, A_2) = \sqrt[p]{|x_2 - x_1|^p + |y_2 - y_1|^p}\,.$$

а) При каких p это — метрика?
б) Можно ли (естественным образом) определить ρ_∞? Что это такое? Является ли оно метрикой?
в) При каких p топологии на плоскости $\mathbb{R}^2$, определенные метриками ρ_p, совпадают?
2. Будем говорить, что интервал α на числовой прямой $\mathbb{R}$ *строго* вложен в интервал β, если α вложен в β и никакие из их концов не совпадают. Доказать, что последовательность строго вложенных друг в друга (непустых) интервалов имеет общую точку. Сформулировать (какой-нибудь) аналог этого утверждения для плоскости $\mathbb{R}^2$.
3. Пусть X — топологическое пространство, $\sim$ — отношение эквивалентности на нем, $X/\sim$ — множество классов эквивалентности.
а) Ввести (естественную) топологию на множестве $X/\sim$.
б) Определим отношение эквивалентности на пространстве $\mathbb{R}^n$ тем, что $x \sim y$ если $y = \lambda x$ для некоторого ненулевого $\lambda \in \mathbb{R}$ (здесь $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\lambda x = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n)$; проверить, что это — действительно отношение эквивалентности.) Является ли пространство $\mathbb{R}^n/\sim$ хаусдофовым? Какие последовательности в этом пространстве имеют пределы и чему они равны?
в) Определим тем же самым способом отношение эквивалентности на пространстве $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ($\mathbb{R}^n$ без начала координат). Является ли пространство $(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})/\sim$ хаусдофовым? Какие последовательности в этом пространстве имеют пределы и чему они равны?
4. Определим на множестве $\mathbb{R}^n$ топологию следующим образом. Рассмотрим всевозможные системы уравнений I вида

$$P_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0,$$
$$P_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0,$$
$$\dots$$
$$P_k(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0,$$

где P_i являются многочленами от n переменных (такие уравнения называются *алгебраическими*). Множество Z_I решений такой системы назовем замкнутым. В частности, пустой системе соответствует замкнутое множество $\mathbb{R}^n$. Множество, дополнение к которому замкнуто, назовем открытым. Полезно иметь в виду, что произвольная (например, бесконечная) система алгебраических уравнений эквивалентна некоторой системе *конечного числа* таковых. Но мы не будем это доказывать.

а) Проверить, что необходимые свойства 1-3 из определения топологии выполняются. Какой системой задается пересечение замкнутых множеств? А объединение? Построенная нами система открытых множеств называется *топологией Зарисского.*

б) Что представляют из себя замкнутые множества в топологии Зарисского на $\mathbb{R}$?

в) Сравнимы ли топология Зарисского и стандартная топология на пространстве $\mathbb{R}^n$.

г) Доказать, что топология Зарисского является самой слабой среди всех топологий на $\mathbb{R}^n$, для которых множество решений произвольного алгебраического уравнения является замкнутым. Это свойство можно считать альтернативным определением.

5. а) Доказать, что замкнутое множество в топологии Зарисского не может содержать подмножество, которое открыто в стандартной топологии на $\mathbb{R}^n$.

б) Доказать, что любые два непустых открытых множества в топологии Зарисского пересекаются.

в) Найти пределы последовательности (x_n, y_n), $x_n = 1/n, y_n = 0$ в топологии Зарисского на $\mathbb{R}^2$.