Математический анализ, I курс, 2007/08 уч.г.
Листок N 10, 14 ноября 2007 г.

1. Исследовать на сходимость ряды
а)$\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^s}$; б)$\sum_{n\geq 2}\frac{1}{n\ln n}$; в)$\sum_{n\geq 1} n!(\frac{x}{n})^n, (x>0)$;
г)$1+\sum_{n\geq 1}(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!})^p, (p>0)$; д)$\sum_{n\geq 3}\frac{1}{(\ln n)^{\ln\ln n}}$;
е)$\sum_{n\geq 3}\frac{1}{(\ln\ln n)^{\ln n}}$; ж)$\sum_{n\geq 1}\frac{\sin n}{n}$; з)$\sum_{n\geq 1}\frac{|\sin n^2|}{n}$.
2. Исследовать на сходимость ряд $1+\sum_{n\geq 1}\frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\cdots(\beta+n-1)}{n!\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+n-1)}x^n$, при условии $\alpha,\beta,\gamma,x>0$.
3. Исследовать на сходимость ряды
а)$\sum_{n\geq 1}\frac{\tau(n)}{n^2}$, где $\tau(n)$ – число делителей n;
б)$\sum_{n\geq 1}\frac{\phi(n)}{n^2}$, где $\phi(n)$ – число не превосходящих n чисел, взаимно простых с ним.
4. Пусть $a_n>0$. Доказать, что для сходимости цепной дроби

$$a_0+\frac{1}{a_1+\frac{1}{a_2+\ldots}}$$

необходимо и достаточно, чтобы ряд $\sum a_n$ был расходящимся.
5. Пусть $a_n>0$ и $S_n=a_1+\ldots+a_n$, $S_n\to\infty$. Доказать, что а) $\sum\frac{a_n}{S_n}=\infty$; б)$\sum\frac{a_n}{S_n^{1+\varepsilon}}<\infty$, для любого $\varepsilon>0$.
6. Пусть $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ монотонно убывают и неотрицательны и $\sum a_n=\sum b_n=\infty$. Всегда ли расходится ряд $\sum min(a_n,b_n)$?
7. Доказать, что если ряд $\sum a_n$ сходится, то $\lim\limits_{t\to 1-0}\sum a_n t^n=\sum a_n$.
8. Вычислить суммы рядов
а) $\sum_{n\geq r}\frac{1}{C_n^r}$, $r\in\mathbb{N}, r\geq 1$; б) $\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$; в) $\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{2n+1}$; г) $\sum_{n\geq 1}\frac{\sin n}{n}$.

9. Рассмотрим сходящийся ряд из векторов на плоскости, будем переставлять его всевозможными способами и суммировать (если он остаётся сходящимся). Какие множества сумм могут при этом получиться?
10. Пусть $\{a_n\}_{n\geqslant 0}$ – любая последовательность вещественных чисел. Доказать, что существует функция $f\in C^\infty(\mathbb{R})$, такая что для всех $k\geq 0$ имеем $f^{(k)}(0)=a_k$.