Математический анализ, I курс, 2007/08 уч.г.

Листок N 11, 21 ноября 2007 г.

1. Пусть $0 < a_n < 1$. Докажите, что три следующих свойства равносильны:
(1) $\sum a_n = \infty$;
(2) $\prod(1 + a_n) = \infty$;
(3) $\prod(1 - a_n) = 0$.

2. Пусть $a_n > -1$, ряды $\sum a_n$ и $\sum a_n^2$ сходятся. Доказать, что бесконечное произведение $\prod(1 + a_n)$ сходится к некоторому ненулевому числу.

3. Пусть p_n — простое число с номером n. Доказать, что $\sum \frac{1}{p_n} = \infty$.

4. Вычислить:
а) $\prod \frac{\beta+n}{\alpha+n}$, где $\alpha > \beta > 0$;
б) $\prod \frac{(1+\frac{1}{n})^n}{e}$;
в) $\prod \cos \frac{\phi}{2^n}$, где $\phi \neq 0$.

5. Существует ли бесконечно дифференцируемая на интервале $(-1, 1)$ функция f, такая что $f \not\equiv 0$, все производные функции f в нуле равны 0, а все производные f в интервале $(-1, 1)$ неотрицательны?

6 (числа Бернулли). Определим числа B_n следующим образом

$$\frac{x}{e^x - 1} = \sum_{n\geq 0} B_n \frac{x^n}{n!}$$

а) Доказать, что $B_3 = B_5 = B_7 = \ldots = 0$;
Выразить через B_n коэфициенты ряда Тейлора в нуле следующих функций
б) $x \operatorname{cth} x$, $x \operatorname{ctg} x$;
в) $\operatorname{th} x$, $\operatorname{tg} x$;
Пусть $S_m(n) = \sum_{0\leq k<n} k^m$, $S(x, n) = \sum_{m\geq 0} S_m(n)\frac{x^m}{m!}$.
г) Вычислить $S(x, n)$;
д) Найти формулу для $S_m(n)$ через B_k. Получить явные формулы для $m = 2, 3, 4$.