Математический анализ, I курс, 2007/08 уч.г.
Листок N 12, 28 ноября 2007 г.

1. а) Существует ли последовательность f_n дифференцируемых на интевале функций, равномерно сходящаяся к дифференцируемой функции f, и такая, что последовательность производных нигде не сходится к производной функции f?
а) Существует ли последовательность f_n дифференцируемых на интевале функций, равномерно сходящаяся к дифференцируемой функции f, и такая, что последовательность производных функций f_n сходится к производной функции f везде, кроме одной точки?
2. Пусть (x) — дробная часть числа x.
Найти все точки разрыва функции

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(nx)}{n^2}\,.$$

Выяснить, интегрируема ли функция f (на отрезках вещественной оси).
3. Пусть a_{ij} — набор чисел, зависящих от двух индексов $i = 1, 2, \ldots$, $j = 1, 2, \ldots$. Верно ли, что если все суммы в рассматриваемых рядах имеют смысл (т.е. если ряды сходятся), то

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}\right) = \sum_{j=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{\infty} a_{ij}\right)?$$