**Математический анализ, I курс, 2007/08 уч.г.**

Листок N 13, 5 декабря 2007 г.

**1.** а). Ненулевая непрерывная функция $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ такова, что

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b xf(x)dx = \ldots = \int_a^b x^{n-1}f(x)dx = 0.$$

Докажите, что функция $f$ по меньшей мере $n$ раз меняет знак (то есть найдется $n+1$ точка $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ на отрезке $[a,b]$, для которых $f(x_i)f(x_{i+1}) < 0$, $i = 1, \ldots, n$).

б). Ненулевая непрерывная функция $f(x)$ на $\mathbb{R}$ с периодом $2\pi$ такова, что

$$\int_0^{2\pi} f(x)dx = \int_0^{2\pi} f(x)\sin x\, dx = \int_0^{2\pi} f(x)\cos x\, dx = \ldots$$

$$\ldots = \int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\, dx = \int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\, dx = 0.$$

Тогда на любом интервале длины $l > 2\pi$ функция $f$ меняет знак по меньшей мере $2n+2$ раза.

**2** (критерий компактности). Пусть $(X,\rho)$ - метрическое пространство.

а) $X$ компактно тогда и только тогда, когда $X$ полно и для любого $\varepsilon > 0$ существует конечная $\varepsilon$-сеть (то есть такой набор точек в $X$, что шары радиуса $\varepsilon$ с центром в этих точках покрывают $X$).

б) $X$ компактно тогда и только тогда, из любой последовательности точек $X$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

**3** (теорема Арцела-Асколи). Пусть $F \subset C^1(K)$ – некоторое семейство непрерывных функций на метрическом компакте $(K,\rho)$. Тогда

а). Если $F$ компактно (в топологии равномерной сходимости), то:

i). Существует такое $C$, что для любых $f \in F$, $x \in K$ $f(x) < C$ ("Равномерная ограниченность")

ii). Для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, такое что для любых $f \in F$, $x_1, x_2 \in K$ из $\rho(x_1,x_2) < \delta$ следует что $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$ ("Равностепенная непрерывность").

б) Обратно, из равномерной ограниченности и равностепенной непрерывности $F$ следует его компактность.