Математический анализ, I курс, 2007/08 уч.г.
Листок N2, 19 сентября 2007 г.

1. Сформулировать понятие предела последовательности $\{x_n\}$ (элементов топологического пространства X) в терминах непрерывности, т.е. для последовательности $\{x_n\}$ и элемента $x \in X$ построить топологическое пространство Y и его отображение F в пространство, такие что $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ тогда и только тогда, когда отображение F непрерывно.
2. Рассматривается множество непрерывных (вещественнозначных) функций на топологическом пространстве X. Доказать, что сумма, разность, произведение и частное двух непрерывных функций (последнее, если имеет смысл, т.е. если знаменатель не обращается в ноль) непрерывны.
3. Доказать, что произведение двух компактных топологических пространств компактно.
4. Отображение $F : X \to Y$ непрерывно. Определите, какие из следующих утверждений верны:
1) прообраз замкнутого множества замкнут;
2) прообраз компактного множества компактен;
3) прообраз всюду плотного множества всюду плотен;
далее (в пунктах 4-5) отображение F сурьективно, т.е. его образ совпадает с пространством Y
4) образ открытого множества открыт;
5) образ замкнутого множества замкнут;
6) образ компактного множества компактен;
7) образ всюду плотного множества всюду плотен.
Сделать то же самое в случае, если пространство X компактно.
5. Назовем подмножество U (координатной) плоскости $\mathbb{R}^2$ открытым, если вместе с каждой точкой (x_0, y_0) для любого угла α оно содержит открытый интервальчик направления α с центром в этой точке (т.е. существует такое $\varepsilon > 0$, что все точки вида $(x_0 + t\cos\alpha, y_0 + t\sin\alpha)$ с $|t| < \varepsilon$ лежат в U). Задает ли это определение топологию на плоскости $\mathbb{R}^2$? Если да, то как эта топология соотносится со стандартной топологией на плоскости $\mathbb{R}^2$?