Математический анализ, I курс, 2007/08 уч.г.
Листок N 5, 10 октября 2007 г.

1. Существует ли такая метрика на множестве всех функций на компакте, что определяемая ею сходимость эквивалентна равномерной?
2. Пусть последовательность функций (f_n) равномерно сходится к f, последовательность (g_n) – к функции g. Верно ли, что последовательность
а) $(f_n + g_n)$ равномерно сходится к $f + g$?
б) $(f_n g_n)$ равномерно сходится к fg?
3. Верно ли, что для пространства непрерывных функций на компакте поточечная сходимость эквивалентна равномерной?
4. а) Докажите, что непрерывная функция на компактном метрическом пространстве равномерно непрерывна.
б) Верно ли, что любая непрерывная функция на $\mathbb{R}$ равномерно непрерывна?
5. Пусть функции f и g на некотором метрическом пространстве равномерно непрерывны. Верно ли, что функция
а) $f + g$ равномерно непрерывна?
б) fg равномерно непрерывна?
6. Докажите, что любое непрерывное отображение f из отрезка $[0, 1]$ в себя имеет неподвижную точку (для которой $f(x) = x$).
7. Функция f непрерывна на отрезке $[0, 1]$ и $f(0) = f(1)$. Докажите, что на графике этой функции найдется горизонтальная хорда длины $\frac{1}{5}$.
8. Пусть P и Q - приведенные квадратные трехчлены, оба корня одного из них меньше обоих корней другого. Доказать, что найдутся такие положительные числа α, β, что многочлен $\alpha P + \beta Q$ всюду положителен.
9. Привести пример связного, но не линейно связного топологического пространства.
10*. а) (Теорема Константинова о возах). Из деревни A в деревню A_1, а также из деревни B в деревню B_1, ведут дороги. Однажды два велосипедиста, связанные веревкой длины 1, стартовали: первый – из A в A_1, второй – из B в B_1, и смогли проехать, не разорвав веревки. На следующий день из A в A_1 и из B_1 в B выехали два одинаковых круглых воза диаметром 1. Докажите, что эти возы столкнутся.
б) (Теорема Константинова об альпинистах). Два альпиниста стоят с двух сторон горного хребта на уровне моря (хребет – ломаная, расположенная выше уровня моря везде кроме точек старта альпинистов). Докажите, что они смогут, двигаясь по хребту, поменяться местами, находясь в каждый момент времени на равной высоте.