Математический анализ, I курс, 2007/08 уч.г.
Листок N 6, 17 октября 2007 г.

1. Упростите выражение: $1 + 2x + 3x^2 + \ldots + (n+1)x^n$.
2. Сколько вещественных корней имеет многочлен $x^n - x - 1$?
3. Обозначим $e = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$.
а) Докажите, что $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{x}{n})^n = e^x$.
б) Докажите, что существует предел $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}$; найдите его.
в) Докажите, что функция e^x дифференцируема и найдите её производную.
4. а) Докажите, что существует предел $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$; найдите его.
б) Докажите, что функция $\sin x$ дифференцируема и найдите её производную.
5. Что больше: e^π или π^e?
6. Верно ли, что если функция определена и дифференцируема на $\mathbb{R}$, то ее производная непрерывна?
7 ("теорема Дарбу"). Пусть функция f определена и дифференцируема на отрезке $[a,b]$ (в частности, в точках a, b имеет односторонние производные $A = f'_+(a)$, $B = f'_-(b)$). Тогда функция f' на интервале (a,b) принимает все значения между числами A и B.
8. Найдите следующие пределы:
а) $\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}x - x}{x^3}$
б) $\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}}$
в) $\lim_{x\to 0}\frac{e^{\frac{x^2}{2}}+\cos x - 2}{\ln(1+x)(\sqrt{1-x^3}-1)}$
г) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\mathrm{tg}x)-\mathrm{tg}(\sin x)}{\arcsin(\mathrm{arctg}x)-\mathrm{arctg}(\arcsin x)}$.
9*. Опишите все функции $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, удовлетворяющие условию: для любого $x \in \mathbb{R}$ существует такое $k_x \in \mathbb{N}$, что $f^k(x) = 0$ при $k \geq k_x$.
10*. а) Многочлен $f(x)$ степени не больше 5 имеет хотя бы один общий корень с каждой из своих производных $f'(x)$, $f''(x)$... Верно ли, что он имеет вид

$$f(x) = C(x-a)^n?$$

б) Тот же вопрос для многочлена произвольной степени.