Математический анализ, I курс, 2007/08 уч.г.
Листок N 7, 24 октября 2007 г.

1. Сформулировать и доказать правило Лопиталя для случая, когда функции $f(x)$ и $g(x)$ стремятся к $+\infty$ при:
а) $x \to a$;
б) $x \to \infty$.
2. Определим "производную" функции $f(x)$ (заданной на вещественной прямой $\mathbb{R}$) в точке x формулой

$$„\frac{df}{dx}”(x) := \frac{1+x^2}{1+(f(x))^2} f'(x)\,,$$

$$„\frac{df}{dx}”(\infty) := \lim_{x\to\infty} „\frac{df}{dx}”(x)\,.$$

а) Доказать, что все многочлены имеют непрерывные "производные" на пополнении $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$.
б) Доказать, что если последовательность многочленов $\{P_n(x)\}$ степени d слабо сходится к многочлену $P(x)$, то "производные" многочленов $\{P_n(x)\}$ равномерно сходятся к "производной" многочлена $P(x)$.
в*) Доказать, что многочлены имеют непрерывные "производные" всех порядков на пополнении $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$.
3. Пусть f — дважды непрерывно дифференцируемая, монотонно возрастающая функция на всей вещественной прямой $\mathbb{R}$, уравнение $f(x) = x$ имеет единственный корень a и $0 < f'(a) = c < 1$. Пусть последовательность $\{x_n\}$ определена тем, что $x_1 \neq a$, $x_n = f(x_{n-1})$ для $n > 1$. Доказать, что существует ненулевой конечный предел $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n - a}{c^n}$.
4. Пусть ограниченная функция f на отрезке $[a, b]$ обладает тем свойством, что все точки разрыва функции f лежат в некотором замкнутом счетном множестве Σ. Доказать, что функция f интегрируема на этом отрезке.