Математический анализ, I курс, 2007/08 уч.г.
Листок N 8, 31 октября 2007 г.

1. Пусть функция f интегрируема (по Риману) на отрезке $[a, b]$.
а) Доказать, что функция f непрерывна в какой-нибудь точке отрезка $[a, b]$.
б) Доказать, что множество точек непрерывности функции f всюду плотно на отрезке $[a, b]$.
2. Может ли для разрывной (где-нибудь), интегрируемой (на любом отрезке) функции на вещественной прямой везде выполняться равенство

$$\frac{d}{dx}\int_{x_0}^{x} f(t)dt \;=\; f(x)\,?$$

3. Интеграл по отрезку $[a, b]$ рассматривается как функция на пространстве непрерывных функций на вещественной прямой $\mathbb{R}$. Является ли эта функция непрерывной:
а) в топологии поточечной сходимости?
б) в топологии слабой сходимости?
в) в топологии равномерной сходимости?
4. Интеграл от фиксированной точки x_0 до точки x рассматривается как отображение пространства непрерывных функций на вещественной прямой $\mathbb{R}$ в себя (функция $f(x)$ переходит в функцию $\displaystyle\int_{x_0}^{x} f(t)dt$). Является ли это отображение непрерывным:
а) в топологии поточечной сходимости?
б) в топологии слабой сходимости?
в) в топологии равномерной сходимости?
5. Вычислить интеграл

$$\int \frac{dx}{(x^2 + 2bx + c)^n}$$

для $n = 1,\, 2,\, 3$.