Математический анализ, I курс, 2007/08 уч.г.
Листок N 9, 7 ноября 2007 г.

1. Пусть f — непрерывная на вещественной прямой функция с компактным носителем (носитель функции — это замыкание множества точек, в которых функция отлична от нуля). Для целого неотрицательного k положим

$$a_k := \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x)dx$$

(под интегралом от $-\infty$ до $+\infty$ понимается интеграл по (любому) отрезку, содержащему носитель функции f). Доказать, что числа a_k, $k = 0, 1, 2, \dots$, определяют функцию f.

2. Для непрерывной на отрезке $[0, 2\pi]$ функции f положим

$$a_k := \int_0^{2\pi} \cos kx f(x)dx\,,$$

$k = 0, 1, 2, \dots$,

$$b_k := \int_0^{2\pi} \sin kx f(x)dx\,,$$

$k = 1, 2, \dots$ Доказать, что числа a_k, $k = 0, 1, 2, \dots$, и b_k, $k = 1, 2, \dots$, определяют функцию f.

3 (признак сходимости Гаусса). Пусть $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ — положительный ряд, $c_n := n^2 \cdot \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - \lambda - \frac{\mu}{n}\right)$. Предположим, что последовательность c_n ограничена. Доказать, что

— если $\lambda > 1$ или $\lambda = 1$, $\mu > 1$, то ряд $\sum a_i$ сходится;

— если $\lambda < 1$ или $\lambda = 1$, $\mu \leq 1$, то ряд $\sum a_i$ расходится.

4. Существуют ли различные (естественно, бесконечно дифференцируемые) функции, имеющие совпадающие ряды Тейлора

а) в одной точке?

б) во всех точках (непустого) интервала определения?

5. Выписать ряды Тейлора функций e^x, $\sin x$, $\cos x$, $\arcsin x$, $\operatorname{arctg} x$ в нуле и функции $\ln x$ в единице и выяснить, где они сходятся (к соответствующей функции).

6. Предположим, что в некоторой (открытой) окрестности точки a ряд Тейлора функции f в точке a сходится к некоторой функции g. Доказать, что функция g бесконечно дифференцируема и ее ряд Тейлора в точке a совпадает с рассматриваемым.