1. Найти суммы $\sum \frac{1}{n^2}$ и $\sum \frac{(-1)^n}{n^2}$ (Указание: рассмотреть функцию x^2 на отрезке $[-\pi, \pi]$).
2. Пусть ряд $\sum a_n$ сходится. Может ли расходится ряд а) $\sum a_n^2$; б) $\sum a_n^3$?
3. (Теорема Бэра) Докажите, что полное метрическое пространство не может быть покрыто счётным числом своих нигде не плотных подмножеств.
4. Докажите, что в компактном хаусдорфовом пространстве для любых непересекающихся замкнутых множеств найдутся непересекающиеся содержащие их открытые множества.
5. Докажите, что если функция f дважды дифференцируема в точке a, то

$$f''(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - 2f(a) + f(a-h)}{h^2}$$

6.а) Вычислите $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$, $n \geq 1$;
б) (Формула Валлиса) Докажите, что

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right)^2 \frac{1}{2n+1}$$

(Указание: воспользуйтесь пунктом а) и неравенством $\sin^{2n+1} x < \sin^{2n} x < \sin^{2n-1} x$ при $0 < x < \frac{\pi}{2}$).
7. Вычислите $\int_0^1 x^p (1-x)^q dx$, $p, q \in \mathbb{N}$.
8. Пусть последовательность непрерывных на отрезке $[0,1]$ функций f_n поточечно сходится к некоторой функции f. Докажите, что f непрерывна хотя бы в одной точке.