Лекция 25. Многообразия и касательные пространства

В прошлом семестре мы дали определение гладкого подмногообразия в $\mathbb{R}^n$, локальных карт на нем, а также гладких функций и гладких отображений. Для бо́льшей гибкости полезно, однако, дать определение, от вложения в $\mathbb{R}^n$ не зависящее.

Зафиксируем число (точнее, символ) $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

Определение 25.1. *k-мерным гладким многообразием класса C^r* называется хаусдорфово топологическое пространство X со счетной базой, наделенное следующей дополнительной структурой:

(1) X представлено в виде объединения открытых подмножеств U_α, называемых *координатными окрестностями*.

(2) Для каждой координатной окрестности U_α задан гомеоморфизм $\varphi_\alpha \colon U_\alpha \to V_\alpha$, где $V_\alpha \subset \mathbb{R}^k$ — открытое подмножество (эти гомеоморфизмы называются *локальными картами*).

(3) Пусть U_α и U_β — две координатные окрестности с непустым пересечением. Тогда отображение

$$\varphi_{\alpha\beta} \colon \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta),$$

заданное формулой $x \mapsto \varphi_\beta(\varphi_\alpha^{-1}(x))$, является диффеоморфизмом открытых подмножеств в $\mathbb{R}^k$.

Предложение 20.6 (вкупе с тем очевидным обстоятельством, что любое подмножество в $\mathbb{R}^n$ является хаусдорфовым пространством со счетной базой) показывает, что всякое гладкое подмногообразие в $\mathbb{R}^n$ является абстрактным гладким многообразием.

Гладкое отображение двух абстрактных гладких многообразий определяется дословно так же, как для подмногообразий в евклидовых пространствах, с помощью определения 20.7 (в этом определении ничего, кроме локальных карт, не используется). Определение диффеоморфизма абстрактных многообразий также дословно совпадает с определением 20.8.

Хотя понятие абстрактного многообразия (определение 25.1) выглядит более общим, чем понятие подмногообразия в $\mathbb{R}^n$ (определение 20.3), они равносильны: можно показать, что всякое абстрактное гладкое k-мерное многообразие диффеоморфно подмногообразию в $\mathbb{R}^n$ класса C^r

при некотором n. Эту теорему (без предположений хаусдорфовости или счетной базы в определении 25.1 она была бы неверна) мы доказывать не будем. Доказательство для случая компактных многообразий можно прочитать во втором томе учебника В. А. Зорича «Математический анализ» или в книге Б. А. Дубровина, С. П. Новикова и А. Т. Фоменко «Современная геометрия», а в общем случае — в первой главе книге С. Стернберга «Лекции по дифференциальной геометрии». Существуют связные «многообразия» (топологические пространства, покрытые координатными окрестностями с гладкими функциями перехода), не являющиеся хаусдорфовыми, или не имеющие счетной базы, или сочетающие оба эти порока.

Не следует, тем не менее, считать определение 25.1 излишеством: во многих ситуациях многообразие естественно определять именно как абстрактное, а выбор конкретного вложения в $\mathbb{R}^n$ лишь усложняет дело. Мы сейчас рассмотрим два важных примера многообразий, которые естественно определять именно таким образом.

Вещественное проективное пространство. Как известно, n-мерное вещественное проективное пространство, обозначаемое $\mathbb{RP}^n$, как множество представляет собой совокупность прямых в $\mathbb{R}^{n+1}$, проходящих через начало координат. Такую прямую можно задать, указав любую точку этой прямой, отличную от начала координат; координаты этой точки называются однородными координатами точки проективного пространства. Однородные координаты $(x_0 : \cdots : x_n)$ и $(x'_0 : \cdots : x'_n)$ (при записи однородных координат их принято отделять не запятыми, а двоеточиями) задают одну и ту же точку проективного пространства тогда и только тогда, когда $x'_j = \lambda x_j$ для некоторого $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ и для всех целых $j \in [0; n]$.

Определим теперь в $\mathbb{RP}^n$ координатные окрестности. Именно, для каждого целого $i \in [0; n]$ положим

$$U_i = \{\, (x_0 : \cdots : x_n) \in \mathbb{RP}^n \mid x_i \neq 0 \,\}.$$

В качестве локальной карты, соответствующей координатной окрестности U_i, рассмотрим отображение $\varphi_i \colon U_i \to \mathbb{R}^n$, заданное формулой

$$(x_0 : \cdots : x_n) \mapsto (x_0/x_i, \ldots, x_{i-1}/x_i, x_{i+1}/x_i, \ldots, x_n/x_i).$$

Легко видеть, что отображение φ_i корректно определено и взаимно однозначно.

Проверим согласованность локальных карт (иными словами, гладкость замены координат при переходе от одной локальной карты к другой). Пусть $0 \leqslant i < j \leqslant n$. Тогда легко видеть, что

$$\varphi_i(U_i \cap U_j) = \{(y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n \mid y_{j-1} \neq 0\},$$
$$\varphi_j(U_i \cap U_j) = \{(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{R}^n \mid z_i \neq 0\}.$$

Поскольку точка $(y_1, \dots, y_n) \in \varphi_i(U_i \cap U_j)$ является образом точки $(y_1 : \dots : y_{i-1} : 1 : y_{i+1} : \dots : y_n) \in \mathbb{RP}^n$ при отображении φ_i, а образ этой последней при отображении φ_j есть, очевидно,

$$(y_1/y_j, \dots, y_{i-1}/y_j, 1/y_j, y_{i+1}/y_j, \dots, y_{j-1}/y_j, y_{j+1}/y_j, \dots, y_n/y_j).$$

Стало быть, отображение φ_{ij} действительно является диффеоморфизмом, и $\mathbb{RP}^n$ удовлетворяет определению многообразия (класса C^∞, и даже, если угодно, вещественно-аналитического).

Мы ввели на $\mathbb{RP}^n$ локальные карты, но ничего еще не сказали о топологии. Зададим ее так: множество $W \subset \mathbb{RP}^n$ считается открытым, если для всякого целого $i \in [0; n]$ множество $\varphi_i(W \cap U_i)$ открыто в $\mathbb{R}^n$. Теперь остается проверить, что φ_i — не просто взаимно однозначные отображения, но гомеоморфизмы, а также что $\mathbb{RP}^n$ с этой топологией хаусдорфово и имеет счетную базу. Все это оставляется читателю.

Грассманиан. Грассманиан, или многообразие Грассмана, является обобщением проективного пространства. Как множество грассманиан $G(k, n)$ есть множество всех k-мерных векторных подпространств в $\mathbb{R}^n$. Структура гладкого многообразия вводится на нем следующим образом.

Зафиксируем в $\mathbb{R}^n$ базис $(v_1, \dots, v_n)$, где $v_1 = (1, 0, \dots, 0), \dots, v_n = (0, \dots, 0, 1)$. Во всяком k-мерном подпространстве $V \subset \mathbb{R}^n$ можно также выбрать базис; если рассматривать элементы этого базиса как вектор-строки, то такой базис можно записать как $n \times k$-матрицу ранга k. Две такие матрицы задают одно и то же подпространство в $\mathbb{R}^n$ тогда и только тогда, когда одна получается из другой умножением слева на невырожденную $k \times k$-матрицу.

Через $U_a \subset G(k, n)$, где $a = (a_1, \dots, a_k)$ — мультииндекс $(1 \leqslant a_1 < \ldots < a_k \leqslant n)$, обозначим подмножество, состояшее из подпространств V, соответствующих матрицам, в которых минор, образованный столбцами с номерами $a_1, \dots, a_k$, отличен от нуля (на геометрическом языке это означает, что V трансверсально $n-k$-мерному подпространству, порожденному векторами v_j для j, не входящих в мультииндекс a). Среди всех матриц, соответствующих данному подпространству $V \in U_a$, существует ровно одна, у которой $k \times k$-матрица, образованная столбцами с номерами $a_1, \ldots, a_k$, является единичной. У нее имеется $kn - k^2 = k(n-k)$ элементов, не лежащих в столбцах с номерами $a_1, \ldots, a_k$; сопоставляя пространству V набор этих $k(n-k)$ чисел, получаем взаимно однозначное отображение

$$\varphi_a \colon U_a \to \mathbb{R}^{k(n-k)}.$$

Объявим всевозможные $U_a \subset G(k,n)$ координатными окрестностями, а φ_a — локальными картами. Из формулы для элементов обратной матрицы очевидно, что отображения замены координат бесконечно дифференцируемы (и даже вещественно аналитичны). Будем говорить, что подмножество $W \subset G(k,n)$ открыто, если для всякого мультииндекса a множество $\varphi_a(W \cap U_a)$ открыто в $\mathbb{R}^n$.

Ясно, что $G(1,n)$ диффеоморфно $\mathbb{RP}^{n-1}$. В общем случае легко проверить, что топологическое пространство $G(k,n)$ хаусдорфово; так как наличие счетной базы очевидно, получаем, что $G(k,n)$ является C^∞-многообразием размерности $k(n-k)$.

Как и проективное пространство, $G(k,n)$ компактно. Чтобы в этом убедиться, можно рассмотреть пространство Z, состоящее из всевозможных наборов $(e_1, \ldots, e_k)$ векторов из $\mathbb{R}^n$, в которых все e_j имеют единичную длину и попарно ортогональны; это пространство, очевидно, компактно (оно, кстати, называется многообразием Штифеля), и проверяется, что отображение $Z \to G(k,n)$, ставящее в соответствие набору $(e_1, \ldots, e_k)$ порожденное им подпространство в $\mathbb{R}^n$, непрерывно и сюръективно.

Вернемся к общей теории. Наша ближайшая цель — определить производную гладкого отображения гладких многообразий таким образом, чтобы при этом получилось обобщение определения производной отображения открытых подмножеств в $\mathbb{R}^n$. Как и раньше, производная будет линейным отображением векторных пространств, но на сей раз необходимо для начала эти векторные пространства определить.

Определение 25.2. Пусть X — гладкое многообразие и $p \in X$. *Кривой, проходящей через точку* p, называется такое гладкое отображение $c \colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to X$, что $c(0) = p$ (число $\varepsilon > 0$ у разных кривых может быть разным).

Две гладкие кривые c_1 и c_2, проходящие через p, называются *эквивалентными*, если для любой координатной окрестности $U \subset X$,

$U \ni x$ и локальной карты $\varphi\colon U \to V \subset \mathbb{R}^{\dim X}$ выполнено равенство $(\varphi \circ c_1)'(0) = (\varphi \circ c_2)'(0)$.

Эквивалентность кривых достаточно проверить для какой-то одной локальной карты. В самом деле, если c_1 и c_2 — две кривые на гладком многообразии X, проходящие через точку p, и если ля некоторой локальной карты φ, область определения которой содержит p, имеем $(\varphi \circ c_1)'(0) = (\varphi \circ c_2)'(0)$, то и для всякой локальной карты ψ, область определения которой содержит p, выполнено равенство $(\psi \circ c_1)'(0) = (\psi \circ c_2)'(0)$, так как $\varphi \circ c_i$ и $\psi \circ c_i$ отличаются на диффеоморфизм.

Определение 25.3. *Касательным пространством* к многообразию X в точке p называется множество классов эквивалентности гладких кривых, проходящих через p.

Касательное пространство к многообразию X в точке p обозначается $\mathcal{T}_pX$, а его элементы называются *касательными векторами в точке p*.

Определение 25.4. Если X и Y — гладкие многообразия и $f\colon X \to Y$ — гладкое отображение, то *производной* отображения f в точке $p \in X$ называется отображение $f'(p)\colon \mathcal{T}_pX \to \mathcal{T}_{f(p)}Y$, которое переводит класс эквивалентности кривой $c\colon (-\varepsilon;\varepsilon) \to X$ в класс эквивалентности кривой $f \circ c\colon (-\varepsilon,\varepsilon) \to Y$.

Разумеется, надо еще удостовериться в корректности этого определения (т.е. показать, что если кривые c_1 и c_2 эквивалентны, то эквивалентны и кривые $f \circ c_1$ и $f \circ c_2$). Это предоставляется читателю.

При таком определении производной следующее утверждение, являющееся для многообразий аналогом правила дифференцирования сложной функции (предложение 17.7), становится очевидным.

Предложение 25.5. *Пусть X, Y и Z — гладкие многообразия, $f\colon X \to Y$ и $g\colon Y \to Z$ — гладкие отображения и $p \in X$. Тогда $(g \circ f)'(p) = g'(f(p)) \circ f'(p)$.*

До сих пор мы рассматривали касательные пространства просто как множества; на самом деле на них можно ввести структуру векторного пространства. Это делается следующим образом.

Пространство $\mathcal{T}_pX$ можно поставить во взаимно однозначное соответствие с пространством $\mathbb{R}^n$, где $n = \dim X$. Именно, пусть

$\varphi\colon U \to \mathbb{R}^n$ — локальная карта (здесь $U \ni p$ — координатная окрестность); тогда если касательный вектор $v \in \mathcal{T}_pX$ представлен кривой $c\colon (-\varepsilon,\varepsilon) \to \mathbb{R}^n$, то производная от отображения $\varphi\circ c\colon (-\varepsilon,\varepsilon) \to \mathbb{R}^n$, будучи линейным отображением из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}^n$, полностью определяется образом элемента $1 \in \mathbb{R}$; обозначим временно этот образ через $\tau_{U,\varphi}(v) \in \mathbb{R}^n$. Заметим, что и обратно, всякий элемент $(a_1,\dots,a_n) \in \mathbb{R}^n$ имеет вид $\tau_{U,\varphi}(v)$, где v — элемент $\mathcal{T}_pX$, представленный кривой $t \mapsto \varphi^{-1}(a_1t,\dots,a_nt)$, где φ — локальная карта, так что $\tau_{U,\varphi}\colon \mathcal{T}_pX \to \mathbb{R}^n$ — действительно взаимно однозначное соответствие.

Если вместо U и φ воспользоваться другой координатной окрестностью $V \ni p$ с локальной картой $\psi\colon V \to \mathbb{R}^n$, то имеем, очевидно,

$$\tau_{V,\psi}(v) = f'_{UV}(\tau_{U,\varphi}(v)), \tag{25.1}$$

где f_{UV} — отображение замены координат, связывающее (U,φ) и (V,ψ).

Определим теперь сложение и умножение на число элементов $\mathcal{T}_pX$ следующим образом: если $v, w \in \mathcal{T}_pX$, то их суммой назовем такой элемент $w \in \mathcal{T}_pX$, что $\tau_{U,\varphi}(w) = \tau_{U,\varphi}(u) + \tau_{U,\varphi}(v)$; если $v \in \mathcal{T}_pX$ и $\lambda \in \mathbb{R}$, то через λv обозначим элемент $w \in \mathcal{T}_pX$, для которого $\tau_{U,\varphi}(w) = \lambda\cdot\tau_{U,\varphi}(v)$. Соотношение (25.1) показывает, что такое определение суммы касательных векторов и произведения касательного вектора на число не зависит от выбора U и φ.

Предупреждение 25.6. Изоморфизм между $\mathcal{T}_pX$ и $\mathbb{R}^n$, который мы установили, ни в каком смысле не является естественным. В общем случае не существует разумного способа отождествить между собой пространства $\mathcal{T}_xX$ при различных $x \in X$.

Теперь выясним, как производная записывается в координатах. Пусть $f\colon X \to Y$ — гладкое отображение многообразий, $x \in X$, $y = f(x) \in Y$. Положим $\dim X = m$, $\dim Y = n$. Выберем в X координатную окрестность $U \ni x$ с локальной картой φ, а в Y — координатную окрестность $V \ni y$ с локальной картой ψ. Уменьшив при необходимости U, можно считать, что $f(U) \subset V$. Пусть отображение $\tilde f = \psi\circ f\circ\varphi^{-1}$ записывается в виде

$$(x_1,\dots,x_m) \mapsto (f_1(x_1,\dots,x_m),\dots,f_n(x_1,\dots,x_m)).$$

Предположим, что касательный вектор $v \in \mathcal{T}_xX$ представлен кривой $c\colon (-\varepsilon,\varepsilon) \to U \subset X$, и пусть отображение $\varphi\circ c\colon (-\varepsilon,\varepsilon) \to \mathbb{R}^m$ имеет вид $t \mapsto (\gamma_1(t),\dots,\gamma_m(t))$. Тогда, очевидно,

$$\tau_{U,\varphi}(v) = (\gamma'_1(0),\dots,\gamma'_m(0))$$

и

$$\begin{aligned}
&\tau_{V,\psi}(Df(x)(v)) = \\
&\quad = \Big(\frac{\partial f_1(\gamma_1(t),\dots,\gamma_m(t))}{\partial t},\dots,\frac{\partial f_n(\gamma_1(t),\dots,\gamma_m(t))}{\partial t}\Big) = \\
&\quad = \Big(\sum \frac{\partial f_1}{\partial x_i}\gamma_i'(0),\dots,\sum \frac{\partial f_n}{\partial x_i}\gamma_i'(0)\Big)
\end{aligned}$$

(частные производные берутся в точке $\varphi(x)$). Иными словами, $\tau_{V,\psi}(f'(x)(v))$ получается из $\tau_{U,\varphi}(v)$ умножением слева на якобиан отображения $\psi\circ f\circ\varphi^{-1}$, представляющего собой запись отображения f в локальных координатах. Стало быть, производная действительно является линейным отображением, и при этом в локальных координатах она совпадает с производной, определенной в лекции 17.

В качестве примера на эту теорию вычислим касательное пространство к грассманиану. Напомним, что на прошлой лекции мы ввели структуру C^∞-многообразия размерности $k(n-k)$ на множестве $G(k,n)$, состоящем из k-мерных векторных подпространств в $\mathbb{R}^n$. Если $\alpha\in G(k,n)$, мы будем обозначать соответствующее этой точке k-мерное подпространство $V\subset\mathbb{R}^n$ через V_α (чтобы избежать записей наподобие $v\in\alpha\in G(k,n)$).

Имея в виду это соглашение, можно описать касательные пространства к грассманиану следующим образом.

Предложение 25.7. *Пусть $G(k,n)$ — грассманиан k-мерных векторных подпространств в $\mathbb{R}^n$ и $\alpha\in G(k,n)$. Тогда касательное пространство $\mathcal{T}_\alpha G(k,n)$ естественно изоморфно пространству линейных отображений* $\mathrm{Hom}(V_\alpha,\mathbb{R}^n/V_\alpha)$.

В формулировке этого предложения нуждаются в уточнении слова «естественно изоморфно». Существование изоморфизм между $\mathcal{T}_\alpha G(k,n)$ и $\mathrm{Hom}(V_\alpha,\mathbb{R}^n/V_\alpha)$ самоочевидно в силу того, что оба эти пространства имеют размерность $k(n-k)$. Чтобы в данной ситуации дать формальное определение *естественного* изоморфизма, необходимо, видимо, ввести понятие векторного расслоения, что в наши планы не входит. Неформально же естественность изоморфизма означает, что изоморфизм можно построить таким образом, чтоб он не зависел от выбора локальных координат на многообразии или каких-то дополнительных структур в пространствах (например, базисов или евклидовых структур). Ср. также предупреждение 25.6: различные касательные пространства к данному многообразию все изоморфны, но естественного изоморфизма между ними, как правило, нет.

Для доказательства предложения мы построим естественный гомоморфизм из $\mathcal{T}_\alpha G(k,n)$ в $\mathrm{Hom}(V_\alpha, \mathbb{R}^n/V_\alpha)$, после чего проверим, что он является изоморфизмом (последнее будет совсем просто).

Начнем с того, что опишем кривые на $G(k,n)$ в инвариантных терминах. Именно, рассмотрим отображение $\Phi\colon (-\varepsilon;\varepsilon) \to (\mathbb{R}^n)^k$, переводящее число t в набор векторов $(e_1)(t),\dots,(e_k)(t)$. Предположим, что векторы $(e_1)(t),\dots,(e_k)(t)$ линейно независимы при всяком t и что каждое из отображений $t \mapsto (e_j)(t)$ является гладким.

В этих условиях обозначим через $\alpha(t) \in G(k,n)$ точку грассманиана, соответствующую подпространству, порожденному векторами $(e_1)(t),\dots,(e_k)(t)$; мы утверждаем, что отображение $t \mapsto \alpha(t)$ является гладкой кривой в грамссманиане и что всякая гладкая кривая в грассманиане получается этой конструкцией (собственно говоря, если бы эти естественное утверждения были неверны, то следовало бы пересмотреть определение локальных координат на грассамниане!).

В самом деле, первое из утверждений можно проверять локально, так что можно считать, что образ Φ лежит в координатной окрестности U_a для некоторого мультииндекса a. Представим набор $(e_1)(t),\dots,(e_k)(t)$ в виде $k \times n$-матрицы $M(t)$; пусть $A(t)$ — ее $k \times k$-минор, образованный столбцами, номера которых входят в мультииндекс a. Соответствие $t \mapsto A(t)^{-1}M(t)$ задает то же отображение из интервала в $G(k,n)$, что исходное отображение Φ, и очевидно, что локальные координаты точки $\alpha(t)$, являющиеся матричными коэффициентами (не всеми) матрицы $A_(t)^{-1}M(t)$, гладко зависят от t. Обратно, пусть $c\colon (-\varepsilon,\varepsilon) \to G = G(k,n)$ — гладкая кривая на грассманиане; уменьшив при необходимости ε, можно считать, что $c(\,(-\varepsilon,\varepsilon)\,) \subset U_a$ для некоторого a. В локальных координатах отображение c — это $k \times n$-матрица, у которой элементы гладко зависят от t, а строки линейно независимы при всех t; остается обозначить строки через $(e_1)(t),\dots,(e_k)(t)$, и мы получим искомое отображение Φ.

Пусть теперь наша кривая Φ при $t = 0$ проходит через точку $\alpha \in G(k,n)$; это означает, что векторы $e_1(0),\dots,e_k(0)$ порождают подпространство $V_\alpha \subset \mathbb{R}^n$. Рассмотрим линейное отображение $\varphi\colon V_\alpha \to \mathbb{R}^n/V_\alpha$, действующее по следующему правилу:

$$\lambda_1 e_1(0) + \ldots + \lambda_k e_k(0) \mapsto (\lambda_1 e_1'(0) + \ldots + \lambda_k e_k'(0)) \bmod V_\alpha. \tag{25.2}$$

(штрихом обозначено дифференцирование по t).

Это отображение не зависит от выбора семейства реперов $e_1(t),\dots,e_k(t)$, представляющего кривую в грассманиане. В самом деле, пусть та же кривая задается семейством реперов $f_1(t), \dots, f_k(t)$; тогда существует такое гладкое отображение $A\colon (-\varepsilon; \varepsilon) \to GL_k(\mathbb{R})$, что $e(t) = A(t)f(t)$ для всех t (напомним, что через $GL_k(\mathbb{R})$ обозначается множество невырожденных $k \times k$-матриц с действительными коэффициентами).

Положим $A(t) = \|a_{ij}(t)\|$. Тогда

$$e_i'(0) = \sum a_{ij}'(0)f_j(0) + \sum a_{ij}(0)f_j'(0) \equiv \sum a_{ij}(0)f_j'(0) \bmod V_\alpha. \quad (25.3)$$

Рассмотрим вектор $v = \sum \lambda_i e_i(0) \in V_\alpha$. Если строить отображение с помощью базисов $e_i(t)$, то он перейдет в $\sum \lambda_i e_i'(0) \bmod V_\alpha$; если же пользоваться базисами $f_i(t)$, то, коль скоро $v = \sum a_{ij}(0)\lambda_i f_j(0)$, имеем ввиду (25.3):

$$v \mapsto \sum a_{ij}(0)\lambda_i f_j'(0) \bmod V_\alpha = \sum \lambda_i e_i'(0) \bmod V_\alpha,$$

что совпадает с (25.2).

Покажем, что эквивалентным кривым, проходящим через α, соответствуют одинаковые линейные отображения из V_α в $\mathbb{R}^n/V_\alpha$. В самом деле, пусть c_1 и c_2 — такие кривые; уменьшив при необходимости их области определения, можно считать, что их образы лежат в $\alpha \in U_a$, где $a = (a_1, \dots, a_k)$ — мультииндекс. Будем, как и раньше, записывать наборы из k линейно независимых векторов в $\mathbb{R}^n$ в виде $k \times n$-матриц. Ввиду только что доказнного, соответствющие этим кривым линейные отображения не изменятся, если заменить каждое из семейств реперов на такое, что подматрица соответсвующих $k \times n$-матриц, образованная столбцами, номера которых входят в a, тождественно равна единичной. В этой ситуации, однако, образы базисных векторов в $\mathbb{R}^n$, номера которых *не* входят в a, образуют базис в $\mathbb{R}^n/V_\alpha$; в этом базисе матрица линейного отображения, соовтетствующего кривой, состоит из производных матричных элементов в столбцах с номерами вне a, так что эквивалентность кривых равносильна совпадению линейных отображений. Тем самым мы получили корректно опрededенное естественное отображение из $\mathcal{T}_\alpha G(k,n)$ в $\operatorname{Hom}(V_\alpha, \mathbb{R}^n/V_\alpha)$; его линейность и сюръективность очевидны; ввиду совпадения размерностей это изоморфизм.