Лекция 26. Касательные векторы, локальные кольца и векторные поля

Будем с этого момента считать, что все наши многообразия, гладкие отображения и пр. имеют класс гладкости C^∞, если явно не оговорено противное. При таком ограничении формулировки освобождаются от громоздких оговорок; отметим еще, что всякое многообразие класса C^r, где $r \geqslant 1$, будет C^r-диффеоморфно многообразию класса C^∞.

Мы дали определение касательного вектора, в котором участвовали локальные координаты (в определении эквивалентности кривых). Сейчас мы дадим равносильное определение того же объекта, от координат не зависящее.

Определение 26.1. Пусть X — гладкое многообразие и $p \in X$. *Ростком гладкой функции в точке* p называется класс эквивалентности пар (f, U), где $U \ni p$ — открытое множество и f — гладкая функция на U, относительно следующего отношения эквивалентности: пары (f, U) и (g, V) называются эквивалентными, если существует такое открытое множество $W \subset U \cap V$, $W \ni p$, что $f|_W = g|_W$.

Ясно, что всякое локальное кольцо любого n-мерного многообразия изоморфно локальному кольцу начала координат в $\mathbb{R}^n$.

Локальные кольца связаны с касательными векторами следующим образом. Пусть $v \in \mathcal{T}_pX$ — касательный вектор, представленный кривой $c\colon (-\varepsilon; \varepsilon) \to X$. Поставим ему в соответствие отображение $D_v\colon \mathcal{O}_p \to \mathbb{R}$, определенное по формуле

$$(f, U) \mapsto (f \circ c)'(0)$$

(если не весь интервал $(-\varepsilon; \varepsilon)$ попадает при отображении c во множество U, надо заменить отображение c на его ограничение на $c^{-1}(U) \subset (-\varepsilon; \varepsilon)$; ясно, что полученная кривая определяет тот же касательный вектор). Можно сказать, что D_v сопоставляет функции f (точнее, ее ростку) производную f в точке p вдоль кривой, представляющей вектор v.

Поскольку и элементы $\mathcal{T}_pX$, и элементы $\mathcal{O}_{X,p}$ — классы эквивалентности, надо проверить, во-первых, что образ ростка функции при отображении D_v не зависит от выбора пары (f, U), представляющей этот росток, и, во-вторых, что само отображение D_v не зависит от выбора кривой, представляющей касательный вектор v.

Первое из этих утверждений очевидно, а второе мы сейчас проверим.

Именно, положим $\dim X = n$. Поскольку всякая точка $p \in X$ обладает окрестностью, диффеоморфной открытому подмножеству в $\mathbb{R}^n$, а росток функции не меняется при ограничении функции на меньшее открытое подмножество, можно сразу считать, что $X = V \subset \mathbb{R}^n$ — открытое множество и $p \in V$. Если $c\colon (-\varepsilon;\varepsilon) \to V$ — гладкая кривая, проходящая через точку p, записанная в координатах по формуле $t \mapsto (c_1(t), \ldots, c_n(t))$, и (f, U) — представитель ростка функции в точке p, то по формуле производной сложной функции имеем

$$(f \circ c)'(0) = \sum_{i=1}^{n} c_i'(0) \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i}(p). \tag{26.1}$$

Поскольку кривые c и $\tilde{c}$, для которых $c_i'(0) = \tilde{c}_i'(0)$ для всех i, определяют один и тот же касательный вектор, формула (26.1) показывает, что отображение $D_v\colon \mathcal{O}_x \to \mathbb{R}$ действительно зависит только от касательного вектора v, а не от представляющей его кривой.

В формуле (26.1) положим $c_i'(0) = a_i$. Тогда отображение D_v запишется в виде

$$D_v\colon f \mapsto a_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \ldots + a_n \frac{\partial f}{\partial x_n}. \tag{26.2}$$

Поскольку для всякого набора чисел $(a_1, \ldots, a_n)$ найдется кривая, для которой эти числа будут производными в нуле (например, кривая $t \mapsto (a_1 t, \ldots, a_n t)$), и поскольку этот набор однозначно восстанавливается по отображению D_v (именно, $a_i = D_v(x_i)$), мы доказали следующее утверждение:

Предложение 26.2. *Пусть X — гладкое многообразие размерности n, $x \in X$, $U \ni x$ — координатная окрестность, $\varphi\colon U \to V \subset \mathbb{R}^n$ — локальная карта и $p = \varphi(x)$. Тогда отображение $v \mapsto D_v$ задает изоморфизм между касательным пространством к X в точке x и множеством отображений из $\mathcal{O}_{X,x}$ в $\mathbb{R}$, заданных по формуле $f \mapsto \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial (f\circ\varphi^{-1})}{\partial x_i}(p)$, где $a_i \in \mathbb{R}$ — константы.*

Сокращенно отображение, заданное формулой (26.2), обозначают $\sum a_i \dfrac{\partial}{\partial x_i}$. Доказанное предложение дает нам право отождествить касательные векторы с отображениями вида (26.2), что мы время от времени и будем делать.

Итак, касательные векторы — это «то, по чему можно дифференцировать». Покажем, что касательные векторы в точке p можно определить чисто алгебраически, исходя исключительно из локального кольца в этой точке.

Для начала заметим, что для всякого $v \in \mathcal{T}_pX$ отображение $D = D_v$ обладает, очевидно, следующими свойствами:

$$\begin{aligned} D(\lambda f + \mu g) &= \lambda D_v(f) + \mu D_v(g) \qquad \text{если } \lambda, \mu \in \mathbb{R}; \\ D(fg) &= f(p) \cdot D(g) + g(p) \cdot f; \\ D(\lambda) &= 0, \qquad \text{если } \lambda \text{ — константа.} \end{aligned} \tag{26.3}$$

Обозначение 26.3. Множество отображений из $\mathcal{O}_p$ в $\mathbb{R}$, удовлетворяющих условиям (26.3), обозначается $\mathrm{Der}_{\mathbb{R}}(\mathcal{O}_p, \mathbb{R})$.

Оказывается, что и обратно, всякий элемент $\mathrm{Der}_{\mathbb{R}}(\mathcal{O}_p, \mathbb{R})$ имеет вид D_v для некоторого $v \in \mathcal{T}_pX$. Чтобы в этом убедиться, посмотрим повнимательнее на устройство локального кольца $\mathcal{O}_p$. Обозначим через $\mathfrak{m}_p \subset \mathcal{O}_p$ идеал, состоящий из ростков функций, обращающихся в нуль в точке p. Идеал $\mathfrak{m}_p$ называется *максимальным идеалом* локального кольца $\mathcal{O}_p$ (поскольку он и впрямь является его единственным максимальным идеалом). Пусть n — размерность нашего многообразия X; тогда кольцо $\mathcal{O}_{X,p}$ изоморфно, как мы уже отмечали, кольцу $\mathcal{O}_{V,o}$, где $V \subset \mathbb{R}^n$ — некоторое открытое подмножество в $\mathbb{R}^n$ и $o \in \mathbb{R}^n$ — начало координат. Далее будем писать $\mathcal{O}$ вместо $\mathcal{O}_{V,o}$ и $\mathfrak{m}$ вместо $\mathfrak{m}_{V,o}$.

Идеал $\mathfrak{m}$ содержит, в частности, ростки координатных функций $x_1, \ldots, x_n$.

Предложение 26.4 (лемма Адамара). *В кольце $\mathcal{O}$ идеал $\mathfrak{m}$ порожден своими элементами $x_1, \ldots, x_n$ (иными словами, для всякого $f \in \mathfrak{m}$ выполнено равенство $f = g_1x_1 + \ldots + g_nx_n$, где $g_1, \ldots, g_n$ — какие-то элементы кольца $\mathcal{O}$).*

Доказательство. Пусть росток из $\mathfrak{m}$ представлен парой (f, U). Тогда для некоторого $r > 0$ замкнутый шар $B = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leqslant r\}$ содержится в U. Поскольку $f(0) = 0$, для всякого $x \in U$ выполнено равенство

$$f(x) = \int_0^1 \frac{d}{dt} f(tx_1, \ldots, tx_n)\, dt = \sum_{i=1}^n x_i \cdot \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx)\, dt.$$

Положим $g_i(x) = \int_0^1 \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(tx)\, dt$. Остается убедиться, что функции g_i гладки (класса C^∞) во внутренности шара B, т. е. что можно дифференцировать под знаком интеграла; это следует, например, из теоремы Лебега об ограниченной сходимости и формулы Лагранжа. $\square$

Заметим, что для аналитических функций лемма Адамара совсем очевидна (перегруппируйте слагаемые в степенном ряде для f.)

Пусть $\mathcal{O}_p$ — локальное кольцо точки p. Через $\mathfrak{m}_p^2 \subset \mathfrak{m}_p \subset \mathcal{O}_p$ обозначается, как водится, идеал кольца $\mathcal{O}_p$, состоящий из всевозможных сумм вида $f_1g_1 + \ldots + f_mg_m$, где все f_i и g_i лежат в $\mathfrak{m}_p$ (число слагаемых произвольно). Поскольку и $\mathfrak{m}_p$, и $\mathfrak{m}_p^2$ являются векторными пространствами над $\mathbb{R}$, можно рассмотреть факторпространство $\mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2$, а также сопряженное к нему пространство $(\mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2)^*$.

Предложение 26.5. *Пусть X — гладкое многообразие, $p \in X$. Тогда векторные пространства $\mathcal{T}_pX$, $(\mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2)^*$ и $\mathrm{Der}_{\mathbb{R}}(\mathcal{O}_p, \mathbb{R})$ естественно изоморфны.*

Слово «естественно» в формулировке этого предложения означает, что отображения, устанавливающие изоморфизмы, не зависят от выбора локальных координат.

Доказательство. Сначала установим изоморфизм между $\mathrm{Der}_{\mathbb{R}}(\mathcal{O}_p, \mathbb{R})$ и $(\mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2)^*$. Это — чистая алгебра. Именно, пусть $D\colon \mathcal{O}_p \to \mathbb{R}$ — элемент пространства $\mathrm{Der}_{\mathbb{R}}(\mathcal{O}_p, \mathbb{R})$. Заметим, что D является тождественным нулем на $\mathfrak{m}_p^2 \subset \mathcal{O}_p$. В самом деле, если $f, g \in \mathfrak{m}_p$, то $D(fg) = g(p)D(f) + f(p)D(g) = 0$, поскольку $f(p) = g(p) = 0$. Ограничим D на $\mathfrak{m}_p \subset \mathcal{O}_p$ — получится линейный функционал на $\mathfrak{m}_p$; поскольку, в силу вышесказанного, он обращается в нуль на $\mathfrak{m}_p^2$, мы можем рассматривать его как линейный функционал на $\mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2$, то есть как элемент пространства $(\mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2)^*$. Обозначим этот элемент через $i(D)$; тем самым мы определили гомоморфизм $i\colon \mathrm{Der}_{\mathbb{R}}(\mathcal{O}_x, \mathbb{R}) \to (\mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2)^*$. Обратно, пусть $\xi \in (\mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2)^*$. Будем рассматривать ξ как линейный функционал на $\mathfrak{m}_p$, являющийся тождественным нулем на $\mathfrak{m}_p^2$. Определим теперь отображение $D(\xi)\colon \mathcal{O}_p \to \mathbb{R}$ по формуле $D(\xi)\colon f \mapsto \xi(f - f(p))$ (поскольку функция $f - f(p)$ обращается в нуль в точке p, правая часть определена). Покажем, что $D(\xi)$ удовлетворяет условиям (26.3) и тем самым лежит в $\mathrm{Der}_{\mathbb{R}}(\mathcal{O}_p, \mathbb{R})$. В проверке нуждается только второе из этих условий («формула Лейбница»):

$$\begin{aligned}
D(\xi)(fg) &= \xi(fg - f(p)g(p)) = \\
&= \xi(\,(f - f(p))(g - g(p)) + f(p)(g - g(p)) + g(p)(f - f(p))\,) = \\
&= \xi(\,(f - f(p))(g - g(p)) + f(p)\xi(g - g(p)) + g(p)\xi(f - f(p)\,) = \\
&= f(p)D(\xi)(g) + g(p)D(\xi)(f)
\end{aligned}$$

(первое слагаемое в третьей строке равно нулю, поскольку $(f-f(p))(g-g(p)) \in \mathfrak{m}_p^2$). Осталось проверить, что гомоморфизмы i и D взаимно обратны; это оставляется читателю в качестве обязательного упражнения.

Теперь установим изоморфизм между $\mathcal{T}_pX$ и $\mathrm{Der}_{\mathbb{R}}(\mathcal{O}_p, \mathbb{R})$. Тут нам уже понадобится лемма Адамара.

Заметим для начала, что в процессе доказательства предложения 26.2 мы построили естественное отображение $v \mapsto D_v$, задающее гомоморфизм из $\mathcal{T}_pX$ в $\mathrm{Der}_{\mathbb{R}}(\mathcal{O}_p, \mathbb{R})$, и даже установили, что этот гомоморфизм является мономорфизмом. Чтобы установить его эпиморфность (то есть что всякий элемент из $\mathrm{Der}_{\mathbb{R}}(\mathcal{O}_p, \mathbb{R})$ имеет вид D_v для некоторого касательного вектора v), воспользуемся локальными координатами; перейдя к локальной карте, можно, как и раньше, считать, что X — открытое подмножество в $\mathbb{R}^n$ и $p = o$ — начало координат. Будем пользоваться теми же обозначениями, что и в доказательстве леммы Адамара.

Итак, пусть $D \in \mathrm{Der}_{\mathbb{R}}(\mathcal{O}, \mathbb{R})$. В силу третьего из условий (26.3) имеем $D(f) = D(f - f(o))$; запишем, по лемме Адамара, $f - f(o) = \sum x_i g_i$. Беря частные производные от обеих частей этого равенства, легко видеть, что $g_i(o) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(o)$. Теперь запишем:

$$Df = D(f - f(o)) = \sum D(x_i g_i) = \sum (x_i(o)D(g_i) + g_i(o)D(x_i)) =$$
$$= \sum D(x_i) g_i(o) = \sum D(x_i) \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i}(o).$$

Полагая $D(x_i) = a_i$, получаем тем самым, что $D = D_v$, где $v = \sum a_i \frac{\partial}{\partial x_i}$, что и завершает доказательство. □

Коль скоро мы нашли алгебраическое определение касательного пространства, стоит выяснить, как при этом определении записывается производная гладкого отображения.

Пусть $f\colon X \to Y$ — гладкое отображение гладких многообразий, и пусть $p \in X$ и $q = f(p) \in Y$. Отображение f индуцирует гомоморфизм локальных колец $f^*\colon \mathcal{O}_{Y,q} \to \mathcal{O}_{X,p}$, определенный следующим образом: ростку из $\mathcal{O}_{Y,q}$, представленному парой (h, U), ставится в соответствие росток из $\mathcal{O}_{X,p}$, представленный парой $(h \circ f, f^{-1}(U))$ (общий принцип: отображение пространств индуцирует гомоморфизм колец функций, направленный в противоположную сторону). Далее, $f^*(\mathfrak{m}_q) \subset \mathfrak{m}_p$ (если функция h обращается в нуль в точке $q = f(p)$, то функция $h \circ f$

обращается в нуль в точке p). Поскольку f^* — гомоморфизм колец, отсюда следует, что $f^*(\mathfrak{m}_q^2) \subset \mathfrak{m}_p^2$. Следовательно, гомоморфизм f^* индуцирует $\mathbb{R}$-линейное отображение $\mathfrak{m}_q/\mathfrak{m}_q^2 \to \mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2$. Сопряженное к этому линейному отображению обозначим $\mathcal{T}_p f\colon (\mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2)^* \to (\mathfrak{m}_q/\mathfrak{m}_q^2)^*$. Как мы установили в предложении 26.5, пространства $(\mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2)^*$ и $(\mathfrak{m}_q/\mathfrak{m}_q^2)^*$ суть касательные пространства $\mathcal{T}_pX$ и $\mathcal{T}_qY$. Так вот, оказывается, что при этом отождествлении гомоморфизм $\mathcal{T}_p f$ — это то же самое отображение, что знакомая нам производная f в точке p. Более формально это утверждение запишется так:

Предложение 26.6. *Если обозначить изоморфизмы из предложения 26.5 через $\alpha_p\colon \mathcal{T}_pX \to (\mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2)^*$ и $\alpha_q\colon \mathcal{T}_qY \to (\mathfrak{m}_q/\mathfrak{m}_p^2)^*$, то нижеследующая диаграмма коммутативна:*

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{T}_pX \arrow[r, "\alpha_p"] \arrow[d, "f_*"'] & (\mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2)^* \arrow[d, "\mathcal{T}_p f"'] \\
\mathcal{T}_qY \arrow[r, "\alpha_q"] & (\mathfrak{m}_q/\mathfrak{m}_q^2)^*
\end{tikzcd}$$

Доказательство, состоящее в бесхитростном прослеживании изоморфизмов, лучше проделать самостоятельно: ничего, кроме усидчивости, для этого не потребуется.

До сих пор мы занимались индивидуальными касательными векторами; поработаем теперь с их семействами — векторными полями. Векторным полем на гладком многообразии X называется отображение v, которое каждой точке $p \in X$ ставит в соответствие касательный вектор $v_p \in \mathcal{T}_pX$, «гладко зависящий от p».

Как же придать точный смысл словам, взятым в кавычки? Как и в случае с функциями, гладкость нужно определять локально. Пусть теперь $U \subset X$ — координатная окрестность и $\varphi\colon U \to V \subset \mathbb{R}^n$ — локальная карта (мы обозначили $n = \dim X$). Тогда, как мы видели на прошлой лекции, касательный вектор в точке $p = \varphi^{-1}(x_1, \dots, x_n)$, где $(x_1, \dots, x_n) \in V$, можно записать в виде $\sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial x_i}$; значит, ограничение семейства качательных векторов на U можно записать в этой локальной карте в виде $\sum_{i=1}^n a_i(x_1, \dots, x_n)\frac{\partial}{\partial x_i}$.

Определение 26.7. Семейство касательных векторов на n-мерном многообразии X называется *векторным полем*, если для любой точки $p \in X$ существуют такие координатная окрестность $U \ni p$ и локальная карта $\varphi\colon U \to V \subset \mathbb{R}^n$, что при записи в этой карте семейства в виде $\sum_{i=1}^n a_i(x_1, \dots, x_n)\frac{\partial}{\partial x_i}$, функции $a_1, \dots, a_n$ являются гладкими.

Легко видеть, что при этом функции a_i будут гладкими при записи векторного поля в виде $\sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial x_i}$, в *любых* локальных координатах. В самом деле, пусть открытое подмножество $U \subset X$ входит в область определения двух локальных карт $\varphi_1\colon U \to V_1$ и $\varphi_2\colon U \to V_2$. Если обозначить через $(x_1, \ldots, x_n)$ координаты в том $\mathbb{R}^n$, в котором лежит V_1, и через $(y_1, \ldots, y_n)$ — в том, в котором лежит U_2, то «функция перехода» $\psi = \varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}\colon U_2 \to U_1$ задает $(x_1, \ldots, x_n)$ как функцию от $(y_1, \ldots, y_n)$. Если теперь в y-координатах семейство касательных векторов записывается в виде $\sum b_i \frac{\partial}{\partial y_i}$, то для произвольной гладкой функции f имеем (по правилу дифференцирования сложной функции)

$$\begin{aligned}\sum_i b_i(y_1, \ldots, y_n) \frac{\partial f}{\partial y_i} &= \sum_i b_i(y_1, \ldots, y_n) \sum_j \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial y_i} = \\ &= \sum_j \Big(\sum_i b_i(y_1, \ldots, y_n) \frac{\partial x_j}{\partial y_i} \Big) \frac{\partial f}{\partial x_j} = \sum_j a_j \frac{\partial f}{\partial x_j},\end{aligned}$$

где $a_j = \sum_i \frac{\partial x_j}{\partial y_i} b_i(y_1, \ldots, y_n)$. В матричной записи это выглядит как $a \circ \psi = Jb$, где J — матрица Якоби $\|\partial x_j / \partial y_i\|$. Поскольку J — матрица из гладких функций с необращающимся в нуль определителем, из правила Крамера следует, что функции $a_1, \ldots, a_n$ гладки тогда и только тогда, когда гладки $b_1, \ldots, b_n$, что и требовалось установить.

Если продифференцировать функцию по касательному вектору, то получится число; если продифференцировать функцию по векторному полю, то есть семейству касательных векторов, то получится функция:

Определение 26.8. Пусть v — векторное поле на многообразии X, f — гладкая функция на X. *Производной функции f по векторному полю v* называется функция $v(f)$, действующая по правилу $x \mapsto v_x(\mathbf{f}_x)$, где $\mathbf{f}_x \in \mathcal{O}_x$ — росток функции f в точке x.

Если в локальных координатах векторное поле v записывается в виде $\sum_{i=1}^n a_i(x_1, \ldots, x_n) \frac{\partial}{\partial x_i}$, то в этих же координатах имеем $v(f) = \sum_{i=1}^n a_i(x_1, \ldots, x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i}$; так как функции a_i гладки, то функция $v(f)$ также гладка, так что дифференцирование по векторному полю переводит гладкие функции в гладкие.

В следующем (очевидном) предложении используется следующее обозначение: $\mathcal{O}(X)$ — кольцо гладких функций на гладком многообразии X.

Предложение 26.9. *Если X — гладкое многообразие, $f, g \in \mathcal{O}(X)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, v — векторное поле на X, то*

$$v(\lambda f + \mu g) = \lambda v(f) + \mu v(g);$$
$$v(fg) = v(f) \cdot g + f \cdot v(g).$$

Свойства дифференцирования по векторному полю, перечисленные в предложении 26.9, лежат в основе следующего определения:

Определение 26.10. Пусть A — коммутативное кольцо[7] и $B \subset A$ — его подкольцо. Отображение $D\colon A \to A$ называется *дифференцированием кольца A над B* (говорят еще: *B-дифференцированием кольца A*), если при любых $f, g \in A$ и $c \in B$ выполнены следующие условия:

$$D(f \pm g) = D(f) \pm D(g);$$
$$D(fg) = D(f) \cdot g + f \cdot D(g);$$
$$D(c) = 0.$$

Множество дифференцирований A над B обозначается $\mathrm{Der}_B(A)$.

Первое из условий в этом определении означает, что D — эндоморфизм аддитивной группы кольца, второе условие называется тождеством Лейбница, а третье означает, что элементы подкольца B играют роль констант; из этого условия и тождества Лейбница немедленно следует, что $D(\lambda f + \mu g) = \lambda D(f) + \mu D(g)$, как только $\lambda, \mu \in B$ и $f, g \in A$. Используя введенную терминологию, можно пересказать предложение 26.9 следующим образом: всякое векторное поле на гладком многообразии X является дифференцированием $\mathcal{O}(X)$ над $\mathbb{R}$ (подразумевается, что $\mathbb{R}$ вложено в $\mathcal{O}(X)$ в качестве подкольца, состоящего из постоянных функций).

Интересно, что верно и обратное (и тем самым векторные поля на многообразии можно определить чисто алгебраически):

Предложение 26.11. *Пусть X — гладкое многообразие. Тогда для всякого дифференцирования $D \in \mathrm{Der}_{\mathbb{R}}(\mathcal{O}(X), \mathbb{R})$ существует и единственно векторное поле v на X, для которого $v(f) = D(f)$ при всех $f \in \mathcal{O}(X)$.*

Доказательство. Начнем с технической леммы.

[7] В нашем курсе слово «кольцо» всегда означает «кольцо с единицей», а «подкольцо» — «подкольцо, содержащее единицу».

Лемма 26.12. *Пусть U — открытое подмножество в гладком многообразии X, $p \in U$. Тогда существуют такие открытое множество $U_1 \subset U$, содержащее p, и гладкая функция $f \in \mathcal{O}(X)$, что* $\operatorname{supp} f \subset U$ *и $f(x) = 1$ для всех $x \in U_1$.*

Доказательство леммы. Замеим, что для всякого $a > 0$ существует возрастающая C^∞-функуия $\varphi_a \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, для которой $\varphi_a(x) = 0$ при $x \leqslant 0$ и $\varphi_a(x) = 1$ при $x \geqslant a$. В самом деле, пусть ψ_1 — неотрицательная C^∞-функция на $\mathbb{R}$, равная нулю вне $(0; +\infty)$ (см. предложение 23.1). Положим $\psi_1(x) = \int_{-\infty}^{x} \psi(t)dt$; тогда искомая функция φ_a получается из ψ_1 линейной заменой переменной и умножением на константу.

Если U — открытое подмножество в $\mathbb{R}^n$, то пусть B — замкнтый шар с центром в p, содержащийся в U, и $\mu \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — неотрицательная функция класса C^∞, равная нулю вне внутренности шара B; положим $a = \mu(p)/2$; если φ_a — функция из леммы 26.12, то $\varphi_a \circ \mu$ — искомая функция на U, носитель которой компактен и содержится в B. В обющем случае, уменьшая, при необходимости, U, можно считать, что U содержится в какой-то координатной окрестности; тогда ввиду только что доказанного существует искомая функция на U, имеющая компактный носитель. Следовательно, ее продалжение нулем на все X также будет C^∞-функцией. □

Следствие 26.13. *Всякий элемент локального кольца $\mathcal{O}_p$, где p — точка на гладком многообразии X, является ростком некоторой гладкой функции, определенной на всем многообразии.*

Доказательство следствия. Пусть элемент кольца $\mathcal{O}_p$ представлен парой (f, U) и $h \in \mathcal{O}(X)$ — функция, существование которой утверждается леммой. Функция

$$F(x) = \begin{cases} f(x)h(x), & x \in U; \\ 0, & x \notin U \end{cases}$$

является, очевидно, гладкой на всем X и имеет тот же росток в p, что и f. □

Теперь можно перейти к доказательству предложения. Пусть $D \in \operatorname{Der}_{\mathbb{R}}(\mathcal{O}(X))$. Для всякой $p \in X$ определим касательный вектор $v_p \in \operatorname{Der}_{\mathbb{R}}(\mathcal{O}_p, \mathbb{R})$ так: поскольку всякий элемент $\mathbf{f} \in \mathcal{O}_p$ является, по следствию 26.13, ростком какой-то функции $f \in \mathcal{O}(X)$, положим $v_p(\mathbf{f}) = D(f)(p)$. Условия (26.3) при этом выполнены с очевидностью, но надо проверить, что определение отображения v_p корректно, то есть что $D(f)(p)$ действительно зависит только от ростка функции f в точке p. Иными словами, надо убедиться, что $D(f)(p) = 0$, если f тождественно равно нулю на некотором открытом множестве $U \ni p$. Это делается так: пусть h — функция, существование которой утверждается леммой 26.12; тогда $fh = 0$, и имеем $0 = D(fh) = D(f) \cdot h + f \cdot D(h)$; беря значение в точке p, получаем $0 = D(f)(p) \cdot h(p) = D(f)(p)$, что и утверждалось.

Стало быть, мы построили по дифференцированию $D \in \mathrm{Der}_{\mathbb{R}}(\mathcal{O}(X))$ семейство касательных векторов $\{v_p\}_{p\in X}$. Осталось убедиться, что это семейство гладко зависит от p; это мы сделаем в локальных координатах. Именно, пусть в локальных координатах наше семейство записывается (на некотором открытом подмножестве $U \subset \mathbb{R}^n$, диффеоморфном координатной окрестности) в виде $\sum a_i(x_1, \dots, x_n)\frac{\partial}{\partial x_i}$; надо проверить, что функции a_i гладки. Если бы «координатные функции» x_i продолжались до гладких функций на всем X, то делать было бы совсем нечего, так как мы бы тогда имели право написать $D(x_i) = a_i \in \mathcal{O}(X)$, и функции a_i оказываются автоматически гладкими. К сожалению, такое продолжение возможно не всегда (например, ничто не мешает выбрать локальные координаты так, чтобы они стремились к бесконечности на границе координатной окрестности), так что придется еще раз применить следствие 26.13. Именно, для произвольной точки $p \in U$ существуют функции $\widetilde{x}_1, \dots, \widetilde{x}_n$, продолжающиеся до гладких функций на всем X и совпадающие с $x_1, \dots, x_n$ в некоторой окрестности $U_1 \ni p$. Теперь функции $D(\widetilde{x}_i)$ гладки на всем X, и при этом функции a_i совпадают с $D(\widetilde{x}_i) \in \mathcal{O}(X)$ на множестве $U_1 \ni p$ и, стало быть, гладки на этом множестве. Раз функции a_i гладки в окрестности произвольной точки $p \in U$, они гладки всюду на U.

Итак, мы показали, что всякое $\mathbb{R}$-дифференцирование кольца $\mathcal{O}_X$ происходит из некоторого векторного поля. Для завершения доказательства надо еще проверить, что разным векторным полям соответствуют разные дифференцирования; сделайте это самостоятельно. □

Коль скоро у нас есть чисто алгебраическое определение векторных полей, с векторными полями можно производить алгебраические манипуляции. Вот важный пример.

Напомним, что *коммутатором* двух эндоморфизмов E_1 и E_2 абелевой группы A называется отображение $[E_1, E_2]\colon x \mapsto E_1(E_2(x)) - E_2(E_1(x))$.

Предложение 26.14. *Пусть A — коммутативное кольцо, $B \subset A$ — его подкольцо. Если D_1 и D_2 — дифференцирования кольца A над B, то и их коммутатор $[D_1, D_2]$ является дифференцированием A над B.*

Бесхитростная проверка оставляется в качестве упражнения.

Поскольку векторные поля — частный случай дифференцирований, для двух векторных полей на многообразии можно также определить коммутатор. Давайте выясним, как он записывается в локальных координатах.

Пусть $v_1 = \sum a_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}$, $v_2 = \sum b_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}$. Посмотрим, как их коммутатор действует на функцию f. Сначала найдем $v_1(v_2(f))$:

$$v_1(v_2(f)) = v_1\Big(\sum b_i(x)\frac{\partial f}{\partial x_i}\Big) = \sum_i v_1(b_i)\cdot\frac{\partial f}{\partial x_i} + b_i\cdot v_1\Big(\frac{\partial f}{\partial x_i}\Big) =$$

$$= \sum_{i,k} a_k\frac{\partial b_i}{\partial x_k}\frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{i,k} b_i a_k\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}.$$

Очевидно, формула для $v_2(v_1(f))$ отличается от вышеприведенной только тем, что в ней меняются местами буквы a и b, причем слагаемые со вторыми производными в обеих формулах совпадают (тут используется симметрия вторых частных производных!). Вычитая эти два равенства и группируя слагаемые с $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ с одинаковыми i, получаем:

$$v_1(v_2(f)) - v_2(v_1(f)) = \sum_i\Big(\sum_k a_k\frac{\partial b_i}{\partial x_k} - b_k\frac{\partial a_i}{\partial x_k}\Big)\frac{\partial f}{\partial x_i}.$$

Стало быть, в координатах коммутатор векторных полей записывается так:

$$\Big[\sum a_i\frac{\partial}{\partial x_i}, \sum b_i\frac{\partial}{\partial x_i}\Big] = \sum_i\Big(\sum_k a_k\frac{\partial b_i}{\partial x_k} - b_k\frac{\partial a_i}{\partial x_k}\Big)\frac{\partial}{\partial x_i}. \tag{26.4}$$

Дифференцирования любого кольца обладают следующими свойствами.

Предложение 26.15. *Если A — коммутативное кольцо и $B \subset A$ — подкольцо, то для всяких $D_i \in \mathrm{Der}_B(A)$ выполнены такие тождества:*

$$[D_1 \pm D_2, D_3] = [D_1, D_3] \pm [D_2, D_3];$$
$$[D_1, D_2] = -[D_2, D_1];$$
$$[[D_1, D_2], D_3] + [[D_2, D_3], D_1] + [[D_3, D_1], D_2] = 0. \tag{26.5}$$

В частности, эти тождества выполнены, если D_1, D_2 и D_3 — векторные поля на многообразии.

Доказательство, сводящееся к непосредственной проверке, оставляется в качестве очередного упражнения.

Тождество (26.5) называется *тождеством Якоби*; в совокупности тождества из предложения 26.15 показывают, что векторные поля на многообразии образуют *алгебру Ли*.