Лекция 27. Фазовые кривые и фазовые потоки

На прошлой лекции мы выяснили алгебраический смысл векторных полей; займемся геометрическим.

Все многообразия, векторные поля, диффеоморфизмы и т. п. будем считать принадлежащими к классу C^∞; в конце лекции мы остановимся на случае конечной гладкости.

Определение 27.1. Пусть v — векторное поле на многообразии X. *Фазовой кривой* векторного поля v называется гладкое отображение $\varphi\colon I \to \mathbb{R}$, где $I \subset \mathbb{R}$ — открытый интервал, удовлетворяющее следующему условию: для всякой точки $t \in I$ выполнено равенство $\varphi'(t)(\frac{d}{dt}) = v(\varphi(t))$.

Иначе можно сказать так: гладкое отображение $\varphi\colon I \to \mathbb{R}$ является фазовой кривой, если для всякого $t \in I$ кривая f представляет касательный вектор $v(\varphi(t))$.

Запишем условие «быть фазовой кривой» в координатах. Пусть в локальной карте $U \subset \mathbb{R}^n$ векторное поле записывается в виде $v = \sum_i v_i \frac{\partial}{\partial x_i}$. Тогда отображение $\varphi\colon I \to U$, заданное формулой $t \mapsto (\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t))$, будет фазовой кривой в том и только том случае, когда $d\varphi_i/dt = v_i(\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t))$ для всех i. Иными словами, фазовая кривая такого векторного поля — не что иное, как решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\varphi_1'(t) = f_1(\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)), \quad \dots \varphi_n'(t) = f_n(\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)). \qquad (27.1)$$

Обратите внимание, что по сравнению с общим случаем, о котором шла речь во втором семестре (лекция 21), правая честь не зависит от t; такие уравнения называют *автономными.*

Из общих фактов о дифференциальных уравнениях, установленных в лекции 21, вытекает, что через каждую точку проходит фазовая кривая и что любые две фазовые кривые $\varphi_1 : I_1 \to X$ и $\varphi_2 : I_2 \to X$, значения которых совпадают в некоторой точке $t \in I_1 \cap I_2$, совпадают всюду на $I_1 \cap I_2$.

Следующее очевидное, но важное свойство фазовых кривых мы выделим в отдельное предложение.

Предложение 27.2. *Если $\varphi\colon I \to X$ — фазовая кривая векторного поля v, и если $\tau \in \mathbb{R}$, то отображение $\varphi_1 : t \mapsto \varphi(t+\tau)$ также является фазовой кривой поля v.*

Теорема 21.1 обеспечивает существование фазовой кривой, проходящей через данную точку и определенной локально — на некотором интервале $I \subset \mathbb{R}$. На все $\mathbb{R}$ она при этом продолжаться не обязана: если рассмотреть на $\mathbb{R}$ векторное поле $x^2(d/dx)$, сиречь уравнение $x' = x^2$, то легко видеть, что его фазовая кривая φ, для которой $\varphi(0) = a > 0$, имеет вид $t \mapsto a/(1 - at)$, и это отображение нельзя продолжить за пределы интервала $(-\infty; 1/a)$: на его границе оно «уходит на бесконечность». Следующее предложение описывает ситуацию, в которой такой уход на бесконечность невозможен.

Предложение 27.3. *Пусть v — векторное поле с компактным носителем на многообразии X. Тогда всякая фазовая кривая поля v продолжается до фазовой кривой, определенной на всем $\mathbb{R}$.*

(*Носителем* векторного поля v называется — как и в случае функций — замыкание множества $\{x \in X \mid v(x) \neq 0\}$.)

Условию этого предложения удовлетворяет, в частности, всякое векторное поле на компактном многообразии.

Доказательство. Рассмотрим дифференциальное уравнение вида (27.1), определенное в области $U \subset \mathbb{R}^n$. Из леммы 21.6 и доказательства теоремы о существовании решения дифференциального уравнения следует, что если $B_r \subset U$ — замкнутый шар радиуса r с центром в точке x_0, и если $M = \sup_{x \in B_r} \|v(x)\|$, то существует проходящая через x_0 фазовая кривая, определенная на интервале длиной $2r/M$, центр которого соответствует точке x_0 (так как все ломаные Эйлера, построенные от точки x_0 на данном интервале, будут лежать в B_r). Следовательно, для всякого $x_0 \in X$ существуют окрестность $V \ni x_0$ и число $\varepsilon_V > 0$, обладающие тем свойством, что при всяком $x \in V$ существует фазовая кривая, определенная на интервале длиной ε_V, центр которого соответствует точке x. Так как носитель поля v компактен, можно выбрать конечное число таких окрестностей, его покрывающих; обозначим через ε наименьшее из чисел ε_V, соответствующих этим окрестностям. Так как всякая фазовая кривая, проходящая через точку x, для которой $v(x) = 0$, заведомо продолжается на все $\mathbb{R}$ (ибо эта «кривая» — постоянное отображение со значением x), получаем, что всякая фазовая кривая $\varphi\colon I \to X$, определенная в точке $t_0 \in I$, продолжается на $I \cup (t_0 - \varepsilon; t_0 + \varepsilon)$. Продолжаемость на все $\mathbb{R}$ следует отсюда с очевидностью. □

Из доказанного предложения вытекает интересное следствие. Начнем с определения.

Определение 27.4. Пусть X — гладкое многообразие. *Однопараметрической группой диффеоморфизмов* многообразия X называется гладкое отображение $G\colon \mathbb{R}\times X\to X$, обладающее следующими свойствами:

(1) Для каждого $t\in R$ отображение $g_t\colon X\to X$, определенное по формуле $g_t(x)=G(t,x)$, является диффеоморфизмом.

(2) Для любых $t_1,t_2\in\mathbb{R}$ выполнено равенство $g_{t_1+t_2}=g_{t_1}\circ g_{t_2}$.

Иными словами, $\mathbb{R}$ (как аддитивная группа) действует на X диффеоморфизмами; условие гладкости отображения G означает, что диффеоморфизм g_t «гладко зависит» от числа t.

Предложение 27.5. *Пусть v — векторное поле с компактным носителем на многообразии X. Тогда существует и единствен фазовый поток $G\colon\mathbb{R}\times X\to X$, обладающий тем свойством, что для всякого $x\in X$ отображение $t\mapsto g_t(x)$ является фазовой кривой поля v.*

(Несколько огрубляя, это означает, что орбиты действия $\mathbb{R}$ являются фазовыми кривыми.)

Доказательство. Единственность очевидна из части 2 теоремы 21.1. Для доказательства существования положим $G(t,x)=g_t(x)=\varphi(t)$, где $\varphi\colon\mathbb{R}\to X$ — фазовая кривая, для которой $\varphi(0)=x$. Поскольку ввиду предложения 27.2 отображение $\varphi_1\colon t\mapsto\varphi(t_1+t)$ также является фазовой кривой, для которой $\varphi_1(0)=g_{t_1}(x)$, имеем $g_{t_1+t_2}(x)=g_{t_2}(g_{t_1}(x))$, так что отображение G является действием $\mathbb{R}$ на X. Остается проверить, что G гладко. Это следует из теоремы о гладкой зависимости решения дифференциального уравнения от начальных условий, доказательство которой мы опустим; его можно прочитать в книгах: А. Картан. «Дифференциальное исчисление. Дифференциальные формы». М.: Мир, 1971 или В. И. Арнольд. «Обыкновенные дифференциальные уравнения» (любое издание). $\square$

Следствие 27.6. *Если X — компактное многообразие, то имеется естественное взаимно однозначное соответствие между векторными полями и фазовыми потоками на X.*

Следствие 27.6 является полезным техническим средством для построения диффеоморфизмов с желаемыми свойствами.

Если носитель векторного поля некомпактен, то, как мы видели, фазовые кривые могут не продолжаться на все $\mathbb{R}$, и в этом случае фазовый поток построить нельзя. Тем не менее всегда существует его суррогат: *локальный фазовый поток.*

Предложение 27.7. *Если v — векторное поле на многообразии X и $x \in X$, то существуют окрестность $U \ni x$, число $\varepsilon > 0$ и гладкое отображение $G\colon (-\varepsilon;\varepsilon) \times U \to X$, обладающее следующими свойствами:*

(1) для всякой точки $p \in U$ существует фазовая кривая $\varphi\colon (-\varepsilon;\varepsilon) \to X$, для которой $\varphi(0) = p$;

(2) если φ — фазовая кривая из пункта (1), то для всякого $t \in (-\varepsilon;\varepsilon)$ имеем $\varphi(t) = G(t,p) = g_t(p)$;

(3) если $|t_1| < \varepsilon$, $|t_2| < \varepsilon$ и $|t_1 + t_2| < \varepsilon$, то для всякого $p \in U$ имеем $g_{t_1+t_2}(p) = g_{t_2}(g_{t_1}(p))$.

Доказательство этого предложения можно спокойно предоставить читателю.

Понятие фазового потока позволяет выявить геометрический смысл коммутатора векторных полей. Именно, оказывается, что он измеряет, в какой степени коммутируют друг с другом соответствующие (локальные) фазовые потоки. Вот точная формулировка.

Предложение 27.8. *Пусть v и w — векторные поля на открытом множестве $U \subset \mathbb{R}^n$, $\{g_t\}$ и $\{h_t\}$ — соответствующие им локальные фазовые потоки в окрестности точки p. Положим $z = [w,v]$, и пусть $\{f_t\}$ — локальный фазовый поток, соответствующий полю z. Тогда*

$$g_s h_t (g_s)^{-1} h_t^{-1}(p) = f_{st}(p) + o(s^2 + t^2) \qquad \text{при } s,t \to 0,$$

причем это o локально равномерно по p.

Доказательство. Заметим, что соответствие между фазовыми потоками и векторными полями можно записать в таком виде (подразумевается, что поток $\{g_t\}$ соответствует полю $\sum v_i \dfrac{\partial}{\partial x_i}$; мы пишем v вместо $(v_1,\dots,v_n)$):

$$g_t(q) = q + tv(q) + o(t);$$

ясно, что o в этой формуле можно выбрать равномерным по q, если считать, что q содержится в некоторой окрестности точки p. Поэтому наше утверждение равносильно такому:

$$g_s h_t g_{-s} h_{-t}(p) = p + st\Big(\sum\nolimits_j \Big(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} w_j - \frac{\partial w_i}{\partial x_j} v_j\Big)\Big) + o(s^2 + t^2). \qquad (27.2)$$

Положим $\varphi(s,t) = g_s h_t (g_s)^{-1} h_t^{-1}(p)$. Формула (27.2), которую нам надо доказать, — это формула Тейлора для отображения φ в нуле. Очевидно, $\varphi(s,0) = \varphi(0,t) = p$ при любых s и t. Следовательно, в ряде Тейлора для φ отсутствуют слагаемые, в которых присутствует только s или только t. Поэтому в степени 1 в разложении φ ничего нет, а в степени 2 присутствует только слагаемое с st; чтобы завершить доказательство, надо только найти один n-мерный вектор-коэффициент при st. Вместо того, чтобы в лоб считать $\partial^2\varphi/\partial s\partial t$, многократно применяя формулу для производной сложной функции, поступим так, как в таких случаях все и делают: будем подставлять ряды Тейлора один в другой, как если бы они сходились к нашим функциям. Писанины при этом будет гораздо меньше, а формулы для коэффициентов ряда Тейлора заведомо получатся верные.

При этом все слагаемые степени $\leqslant 2$ надо, естественно, выписать, а слагаемые степени > 2 можно отбрасывать (на разложение до второго порядка включительно они не повлияют). Специфика нашей функции φ позволяет добиться еще одного упрощения: можно отбрасывать и все слагаемые с s^2 или t^2. В самом деле, по ходу преобразований они могут дать либо слагаемое степени, большей 2, которое мы все равно отбросим, либо слагаемые с s^2 или t^2, про которые мы знаем заранее, что в итоге они сократятся.

Имея все это в виду, приступим к выкладкам:

$$h_{-t}(p) = p - tw(p) + O(t^2) = p - tw(p)$$

(мы отбросили $O(t^2)$, как и обещали);

$$g_{-s}h_{-t}(p) = p - tw(p) - sv(p - tw(p)) = p - tw(p) - s\left(v(p) - t\sum \frac{\partial v}{\partial x_j} w_j\right) = \\ = p - tw(p) - sv(p) + st\sum \frac{\partial v}{\partial x_j} w_j$$

(мы применили формулу Тейлора к v; во внутренних скобках опять отброшено $O(t^2)$). Далее,

$$h_t g_{-s} h_{-t}(p) = p - tw(p) - sv(p) + st\sum \frac{\partial v}{\partial x_j} w_j + tw(p - tw(p) - sv(p)) =$$

(во внутренних скобках сразу отброшено слагаемое с st)

$$= p - tw(p) - sv(p) + st\sum \frac{\partial v}{\partial x_j} w_j + tw(p) + t^2(\ldots) -$$
$$- st\sum \frac{\partial w}{\partial x_j} v_j + tO(s^2+t^2) =$$
$$= p - sv(p) + st\underbrace{\sum\left(\frac{\partial v}{\partial x_j} w_j - \sum \frac{\partial w}{\partial x_j} v_j\right)}_{C}.$$

Наконец,

$$g_s h_t g_{-s} h_{-t}(p) = p - sv(p) + stC + sv(p - sv(p) + stC) + O(s^2) =$$
$$= p - sv(p) + stC + sv(p) - s^2(\ldots) + s^2tC(\ldots) + (\ldots) =$$
$$= p + st\sum\left(\frac{\partial v}{\partial x_j} w_j - \sum \frac{\partial w}{\partial x_j} v_j\right) + O(s^2+t^2).$$

Доказаетльство закончено. □

У относящегося к инфинитезимальной ситуации предложения 27.8 есть полезное глобальное следствие:

Предложение 27.9. *Если коммутатор векторных полей равен нулю, то соответствующие им (локальные или глобальные) фазовые потоки коммутируют.*

Подробнее: пусть X — гладкое многообразие, v и w — такие векторные поля на X, что $[v,w]=0$. Если $\{g_t\}$ и $\{h_t\}$ — локальные или глобальные фазовые потоки, соответствующие полям v и w, то для любых s и t, для которых отображения g_s и h_t определены, выполнено равенство $g_s \circ h_t = h_t \circ g_s$.

Доказательство. Поскольку для всякого натурального N выполнено соотношение $(g_{s/N})^N = g_s$, достаточно показать, что коммутируют $g_{s/N}$ и $h_{t/N}$ для некоторого $N \in \mathbb{N}$. Поэтому можно считать, что отображения g_s и h_t не выводят данную точку p за пределы координатной окрестности и, тем самым, что X — это область в $\mathbb{R}^n$.

Чтобы показать, что $g_s(h_t(p)) = h_t(g_s(p))$, зададимся целым положительным числом k. Из предложения 27.8 следует, что для любой точки q из этой окрестности выполнено соотношение

$$\|g_{s/k}(h_{t/k}(p)) - h_{t/k}(g_{s/k}(p))\| = o(1/k^2) \qquad \text{при } k \to \infty, \tag{27.3}$$

причем o равномерно по q. Чтобы перейти от

$$g_s h_t = \underbrace{g_{s/k} \dots g_{s/k}}_{k} \underbrace{h_{t/k} \dots h_{t/k}}_{k}(p)$$

к

$$h_t g_s = \underbrace{h_{t/k} \dots h_{t/k}}_{k} \underbrace{g_{s/k} \dots g_{s/k}}_{k}(p),$$

надо k^2 раз переставить $g_{s/k}$ и $h_{t/k}$. Стало быть, $\|g_s(h_t(p)) - h_t(g_s(p))\|$ оценивается сверху суммой k^2 слагаемых, каждое из которых есть $o(1/k^2)$ ввиду (27.3). Устремляя k к бесконечности, получаем, что эта разность равна нулю, что и завершает доказательство. $\square$

В заключение отметим, что все сказанное в этой лекции верно и для векторных полей класса C^r с любым $r \geqslant 2$; соответствующие фазовые потоки будут, естественно, тоже иметь гладкость C^r.