Лекция 28. Интегрирование плотностей

Поставим себе задачу проинтегрировать гладкую функцию по многообразию таким образом, чтобы результат не зависел от выбора локальных координат. Чтобы выделить основную трудность, предположим, что носитель функции f на многообразии X содержится в одной координатной окрестности. В локальных координатах $(x_1, \dots, x_n)$ можно написать

$$\int_X f = \int_{\mathbb{R}^n} f(x_1, \dots, x_n)\, dx_1 \dots dx_n, \tag{28.1}$$

но если $(y_1, \dots, y_n)$ — другие локальные координаты, действующие в той же окрестности, то из формулы замены переменных вытекает, что

$$\begin{gathered}\int_{\mathbb{R}^n} f(x_1, \dots, x_n)\, dx_1 \dots dx_n = \\ = \int_{\mathbb{R}^n} f(y_1, \dots, y_n) \left| \frac{\partial(x_1, \dots, x_n)}{\partial(y_1, \dots, y_n)} \right| dy_1, \dots, dy_n,\end{gathered} \tag{28.2}$$

и это не совпадает с $\int_{\mathbb{R}^n} f(x_1, \dots, x_n)\, dx_1 \dots dx_n$. Стало быть, просто так интегрировать *функции* по многообразию не получится: формула замены переменной подсказывает, что объекты, которые по многообразию интегрировать можно, должны записываться по-разному в зависимости от выбора системы координат: при смене системы координат наша «функция» должна умножаться на модуль якобиана функции перехода. Соответствующие объекты будем называть плотностями. Дадим теперь точные определения.

Определение 28.1. Пусть V — конечномерное векторное пространство над $\mathbb{R}$, и пусть $\mathcal{B}$ — множество всех базисов пространства V. *Элементом объема* на V называется отображение $\Phi\colon \mathcal{B} \to [0; +\infty)$, удовлетворяюшее следующему условию: если $e_1, \dots, e_n$ и $f_1, \dots, f_n$ — два базиса, причем $f_i = \sum a_{ij} e_j$, то $\Phi(f_1, \dots, f_n) = |\det(\|a_{ij}\|)| \cdot e_1, \dots, e_n$.

Ясно, что для задания элемента объема достаточно задать его значение на каком-то одном базисе и что все элементы объема на данном пространстве отличаются друг от друга умножением на неотрицательную константу.

Пример 28.2. Пусть на пространстве V из определения 28.1 задана евклидова метрика (положительно определенное скалярное произведение) $(\cdot, \cdot)$. Тогда отображение

$$(e_1, \dots, e_n) \mapsto \sqrt{\det \|(e_i, e_j)\|}$$

является элементом объема. Мы будем называть его *элементом объема, соответствующим метрике.*

Определение 28.3. *Плотностью* на многообразии X будем называть отображение φ, ставящее в соответствие всякой точке $x \in X$ элемент объема на $\mathcal{T}_x X$ и обладающее тем свойством, что зависимость элемента объема от точки $x \in X$ является непрерывной.

В этом определении нуждается в расшифровке понятие «непрерывная зависимость элемента объема от точки). Именно, пусть $U \subset X$ — координатная окрестность с локальными координатами $x_1, \ldots, x_n$, и пусть точке $x \in X$ ставится в соответствие элемент объема φ_x на $\mathcal{T}_x X$. Тогда на U определена функция

$$\varphi\colon x \mapsto \varphi_x(\partial/\partial x_1, \ldots, \partial/\partial x_n), \tag{28.3}$$

и требуется, чтобы эта функция была непрерывной.

Проверим, что это определение непрерывности корректно (т.е. не зависит от выбора локальных координат), и одновременно выясним закон преобразования функции φ. Именно, пусть $y_1, \ldots, y_n$ — другие локальные координаты. Тогда, поскольку

$$\frac{\partial}{\partial y_i} = \sum \frac{\partial x_j}{\partial y_i} \frac{\partial}{\partial x_j},$$

имеем

$$\varphi_x(\partial/\partial y_1, \ldots, \partial/\partial y_n) = \varphi_x(\partial/\partial x_1, \ldots, \partial/\partial x_n) |\det \|\partial x_j \partial y_i\||. \tag{28.4}$$

Стало быть, если записывать плотность в локальных координатах в виде функции (28.3), то при замене координат она умножается на модуль якобиана.

Важный пример плотности получается следующим образом. Пусть $X \subset \mathbb{R}^n$ — замкнутое подмногообразие в $\mathbb{R}^n$ (или в открытом подмножестве в $\mathbb{R}^n$). Предположим, что на $\mathbb{R}^n$ зафиксирована евклидова структура; тогда она индуцирует евклидову структуру и на каждом пространстве $\mathcal{T}_x X \subset \mathbb{R}^n$; сопоставляя этой структуре элемент объема на $\mathcal{T}_x X$, как объяснено выше, получаем плотность на X, которую мы будем называть *элементом площади*; интеграл от элемента площади по X — не что иное, как k-мерный объем многообразия X, где $k = \dim X$.

Чтобы определить интеграл от плотности, нам необходимо одно техническое средство (важное и во многих других вопросах); мы посвятим ему отдельный подраздел.

Разбиение единицы

В прошлом семестре мы уже встречались с разбиениями единицы. Сейчас нам понадобится другой (и более распространенный) вариант этой конструкции. Мы немного изменим определение 24.4.

Определение 28.4. Пусть $\{U_i\}_{i\in I}$ — открытое покрытие C^∞-многообразия X. *Разбиением единицы, подчиненным покрытию* $\{U_i\}$, называется семейство $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha\in \mathrm{A}}$, где $\varphi_\alpha\colon X\to[0;+\infty)$ — функции класса C^∞, обладающее следующими свойствами.

(i) Носитель каждой из функций φ_α целиком содержится в каком-нибудь из множеств покрытия.

(ii) У всякой точки $x\in X$ существует окрестность $W\ni x$, имеющая непустое пересечение с $\operatorname{supp}\varphi_\alpha$ для не более чем конечного множества индексов $\alpha\in \mathrm{A}$.

(iii) Для всякой точки $x\in X$ имеем $\sum_{\alpha\in A}\varphi_\alpha(x)=1$.

Аналогично выглядит определение разбиения единицы для многообразий конечной гладкости, а также для произвольных топологических пространств (в последнем случае функции φ_α предполагаются только непрерывными).

Обратите внимание, что множества из покрытия и функции пронумерованы, вообще говоря, разными множествами индексов.

Предложение 28.5. *Для всякого покрытия гладкого многообразия X существует подчиненное ему разбиение единицы.*

Доказательство. Очевидно, что у многообразия существует покрытие $\{W_j\}_{j\in J}$ со следующими свойствами:

(1) Для всякого $j\in J$ множество $\overline{W_j}$ целиком содержится в какой-нибудь координатной окрестности.

(2) Всякое множество W_j содержится в каком-нибудь U_i.

Лемма 28.6. *Существует последовательность компактных подмножеств $K_m\subset X$, для которой $K_m\subset \operatorname{Int}(K_{m+1})$ при всех m и $\bigcup_{m=1}^\infty=X$.*

Доказательство леммы. Лемма очевидным образом выполняется, если X гомеоморфно открытому шару в $\mathbb{R}^n$.

Поскольку X, по определению, имеет счетную базу, имеем $X=\bigcup_{k=1}^\infty V_k$, где все V_k — открытые подмножества, гомеоморфные открытым шарам. Пусть $V_k=\bigcup_{l=1}^\infty K_{kl}$, где все K_{kl} компактны и $K_{kl}\subset K_{k,l+1}$. Если теперь положить $K_m=\bigcup_{k+l\leqslant m}K_{kl}$, то все условия будут выполнены. □

Модифицируем теперь покрытие $\{W_j\}$ следующим образом. Ввиду компактности K_1 имеем $K_1 = W_{j_1} \cup \ldots \cup W_{j_{r_1}}$ для каких-то $j_1, \ldots, j_{r_1} \in J$. Положим $Z_{1i} = W_{j_i} \cap \mathrm{Int}(K_2)$. Далее, $K_2 = W_{j_1} \cup \ldots \cup W_{j_{r_2}}$; положим $Z_{2i} = W_{j_i} \cap (\mathrm{Int}(K_3) \setminus K_1)$, и продолжим это построение далее: при каждом $l > 1$ имеем

$$K_l \setminus K_{l-1} \subset Z_{l1} \cup \ldots \cup Z_{l,r_l} \subset \mathrm{Int}(K_{l+1}$$

и $K_{l-1} \cap Z_{lj} = \varnothing$ для всякого j. Перенумеруем множества Z_{ij} произвольным образом и обозначим полученное открытое покрытие многообразия X через $\{Z_\beta\}_{\beta \in \mathrm{B}}$. Это покрытие обладает следующими свойствами.

(1) Каждое Z_β содержится в одном из W_k; тем самым оно вместе со своим замыканием содержится в какой-то координатной окрестности.

(2) У всякой точки $x \in X$ существует окрестность, пересекающаяся только с конечным числом множеств $\overline{Z_\beta}$ (в самом деле, если $x \in K_m \subset \mathrm{Int}(K_{m+1})$, то $\mathrm{Int}(K_{m+1})$ не пересекается с множествами из нашего покрытия, построенными на $m+2$-м и последующих шагах).

Лемма 28.7. *Если $Z \subset X$ — открытое множество, содержащееся вместе со своим замыканием в какой-то координатной окрестности, то существует неотрицательная C^∞-функция $\phi\colon X \to \mathbb{R}$, для которой $U = \phi^{-1}(0; +\infty)$.*

Доказательство леммы. Пусть $U \supset \overline{Z}$ — координатная окрестность; тогда функция $\varphi\colon U \to Z$ с требуемыми свойствами существует по предложению 23.1; поскольку $\operatorname{supp}\phi \subset U$, продолжение ее нулем на все X гладкости не нарушит. □

Ввиду доказанной леммы, построим для каждого $\beta \in \mathrm{B}$ бесконечно гладкую функцию $\phi_\beta : X \to [0; +\infty)$, для которой $Z_\beta = \phi_\beta^{-1}(0; +\infty)$. Ввиду свойств (1) и (2) покрытия $\{Z_\beta\}$ функции ϕ_β обладают всеми свойствами разбиения единицы, подчиненного $\{Z_\beta\}$, кроме свойства (iii); чтобы исправить это, положим, как обычно, $\varphi_\beta = \phi_\beta / \sum_\gamma \phi_\gamma$.

Поскольку всякое Z_β содержится в каком-то W_j, а всякое W_j — в каком-то U_i, построенное разбиение единицы подчинено и покрытию $\{U_i\}$. □

Замечание 28.8. Хаусдорфово топологическое пространство называется *паракомпактным*, если для всякого его открытого покрытия существует подчиненное ему разбиение единицы. Как мы только что показали, всякое многообразие паракомпактно (заметьте, что при этом использовалось условие счетной базы из определения многообразия).

Можно показать, что паракомпактны и многие другие важные в приложениях топологические пространстве. В частности, паракомпактны все компактные пространства, все метризуемые пространства и все CW-комплексы.

Вернемся к плотностям. Напомним, что в локальных координатах плотность записывается как функция (значение на базисе $\partial/\partial x_1, \ldots, \partial/\partial x_n$); при замене локальных координат эта функция преобразуется по правилу (28.4).

Ясно, что такое носитель плотности. Пусть Φ — плотность на X, причем $\operatorname{supp}\varphi$ содержится в координатной окрестности U с локальными координатами $x_1, \ldots, x_n$. Если при этом Φ представляется в виде функции φ от $x_1, \ldots, x_n$, то положим

$$\int_X \Phi = \int_U \varphi(x_1, \ldots, x_n)dx_1 \ldots dx_n.$$

Из (28.4) и формулы замены переменных вытекает, что $\int_X \Phi$ не зависит от выбора координатной окрестности, содержащей носитель Φ.

Пусть теперь Φ — произвольная плотность. В силу предложения 28.5 существует счетное разбиение единицы $\{f_i\}$, обладающее тем свойством, что все $\operatorname{supp} f_i$ компактны и носитель всякой f_i содержится в какой-нибудь координатной окрестности. Положим теперь

$$\int_X \Phi = \sum_i \int_X (f_i\Phi);$$

поскольку все слагаемые в правой части корректно определены, левая часть также корректно определена. Надо только проверить, что интеграл не зависит от выбора разбиения единицы. Это делается так. Пусть $\{g_j\}$ — другое разбиение единицы (также счетное, с компактными носителями, также подчиненное некоторому покрытию координатными окрестностями). Тогда $\{f_ig_j\}$ — также, очевидно, разбиение единицы с указанными свойствами. Далее, поскольку носитель всякой f_i компактен, получаем, что $\operatorname{supp} f_i$ может иметь непустое пересечение не более чем с конечным числом $\operatorname{supp} g_j$. Поэтому $f_i = \sum_j f_ig_j$, причем сумма в правой части конечна. Следовательно, $\int_X f_i\Phi = \sum_j \int_X f_ig_j\Phi$, откуда и из свойств двойных рядов (предложение 11.11) вытекает, что

$$\sum_i \int_X (f_i\Phi) = \sum_{i,j} \int_X (f_ig_j\Phi).$$

Так как аналогичное равенство можно записать с переменой ролей f и g, все доказано.