Лекция 29. Дифференциальные формы

Перейдем теперь к изложению более изощренной теории интегрирования, являющейся далеким и нетривиальным обобщением формулы Ньютона–Лейбница. Нам понадобится довольно солидная подготовка: надо будет сначала дать определение тех объектов, которые мы будем интегрировать (эти объекты называются дифференциальными формами), а затем — объектов, по которым мы мы будем интегрировать (это будут или сингулярные цепи, или ориентированные многообразия с краем). Начнем с форм.

Формы степени 1

Определение 29.1. Пусть $x \in X$, где X — гладкое многообразие. *Кокасательным пространством к многообразию X в точке x* называется векторное пространство, двойственное к $\mathcal{T}_x X$.

Обозначение: $\mathcal{T}_x^* X$ (по общему правилу) или $\Omega^1_{X,x}$.

Элементы кокасательного пространства называются кокасательными векторами (а иногда — ковекторами).

Определение 29.2. *Дифференциальной формой степени 1* (синонимы: 1-форма, пфаффова форма) на многообразии X называется отображение ω, которое каждой точке $x \in X$ ставит в соответствие кокасательный вектор $\omega_x \in \Omega^1_{X,x}$ таким образом, что ω_x гладко зависит от x.

В этом определении нуждается в разъяснении выражение «ω_x гладко зависит от x». Под этим понимается следующее. Пусть $U \subset X$ — координатная окрестность с локальными координатами $x_1, \dots, x_n$; как мы знаем, в каждой точке $x \in U$ касательные векторы $\partial/\partial x_1, \dots, \partial/\partial x_n$ образуют базис в $\mathcal{T}_x X$; обозначим через $dx_1, \dots, dx_n$ дуальный базис в $\mathcal{T}_x^* X$ — тогда на U форма ω запишется в виде $\sum f_i dx_i$. Так вот, условие гладкости состоит в том, что функции f_i должны быть гладкими. Поскольку при переходе к другим локальным координатам $y_1, \dots, y_n$ базис $\{\partial/\partial y_j\}$ получается из $\{\partial/\partial x_j\}$ умножением на невырожденную матрицу из гладких функций, дуальные базисы связаны аналогичным образом, так что все равно, в каких именно локальных координатах проверять эту гладкость.

Множество 1-форм на многообразии X обозначается $\Omega^1(X)$. Это векторное пространство над $\mathbb{R}$ и, кроме того, модуль над кольцом $\mathcal{O}(X)$ гладких функций на X: если f — гладкая функция на X и $\omega \in \Omega^1(X)$, то форма $f\omega$ задается по правилу $(f\omega)_x = f(x)\omega_x$.

Важный источник построения 1-форм — операция дифференцирования функций:

Определение 29.3. Пусть f — гладкая функция на многообразии X. Ее *дифференциалом* называется 1-форма df, определенная следующим образом: для всякого $x \in X$ линейный функционал $(df)_x \in \mathcal{T}_x X$ действует по правилу $v \mapsto v(f)$, если рассматривать касательные векторы как дифференцирования из $\mathcal{O}_{X,x}$ в $\mathbb{R}$ (обозначение 26.3).

Пример 29.4. Коэффициент кокасательного вектора $(df)_x$ при dx_i в базисе $\langle dx_1, dx_2, \ldots, dx_n\rangle$ равен результату действия $\frac{\partial}{\partial x_i}$ на f в точке x, то есть $(\partial f/\partial x_i)(x)$. Следовательно, имеет место равенство

$$df = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i. \tag{29.1}$$

Из этого равенства, в свою очередь, видно что форма dx_i является дифференциалом координатной функции x_i, и тем самым запись $\omega = \sum f_i dx_i$ не является двусмысленной.

Для дифференциалов функций верен такой аналог формулы Лейбница:

Предложение 29.5. *Если $f, g \in \mathcal{O}(X)$, то $d(fg) = fdg + gdf$.*

Доказательство. Это тавтология: если дифференцирование v лежит в $\mathcal{T}_x X$, то

$$d(fg)_x(v) = v(fg) = f(x)v(g) + g(x)v(f) = (fdg + gdf)_x(v).$$

Можно также, не мудрствуя лукаво, провести вычисление в локальных координатах. □

Замечание 29.6. Дифференциальные формы можно, подобно векторным полям, определить чисто алгебраически. Например, легко показать, что $\Omega^1(X) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}(X)}(\mathrm{Vect}(X), \mathcal{O}(X))$ (изоморфизм $\mathcal{O}(X)$-модулей; через $\mathrm{Vect}(X)$ обозначено множество векторных полей на X, рассматриваемое как $\mathcal{O}(X)$-модуль). Более интересна другая алгебраическая характеризация: оказывается, что $\Omega^1(X)$ изоморфен, как $\mathcal{O}(X)$-модуль, модулю с образующими df для всевозможных $f \in \mathcal{O}(X)$ и определяющими соотношениями

$$\begin{aligned} df &= 0, && \text{если } f \text{ — константа;}\\ d(f+g) &= df + dg && \text{для всяких } f, g \in \mathcal{O}(X).\\ d(fg) &= fdg + gdf && \text{для всяких } f, g \in \mathcal{O}(X). \end{aligned}$$

Мы не будем ни доказывать этот факт, ни пользоваться им, но полезно иметь его в виду.

Определение 29.7. Пусть $\varphi\colon X \to Y$ — гладкое отображение и ω — форма степени 1 на Y. Тогда ее *обратным образом* при отображении φ называется 1-форма $\varphi^*\omega \in \Omega^1(Y)$, определенная по формуле

$$(\varphi^*\omega)_x(v) = \omega_{\varphi(x)}(f_*v),$$

где через $\varphi_*\colon \mathcal{T}_xX \to \mathcal{T}_{f(x)}Y$ обозначена, как обычно, производная отображения φ в точке x.

Основное свойство обратного образа — это то, что он коммутирует со взятием дифференциала:

Предложение 29.8. *Пусть $\varphi\colon X \to Y$ — гладкое отображение и f — гладкая функция на Y. Тогда $d(f\circ\varphi) = \varphi^*(df)$.*

Доказательство. Это тоже тавтология: если $v \in \mathcal{T}_xX$, то

$$d(f\circ\varphi)_x(v) = v(f\circ\varphi) = \varphi_*v(f) = (df)_{f(x)}(\varphi_*v) = \varphi^*(df)(v).$$

$\square$

Немного линейной алгебры

В этом разделе мы напомним в удобной для нас форме некоторые факты из линейной алгебры.

Пусть V — векторное пространство над полем K. Полилинейное отображение $\omega\colon V^m \to k$ называется *кососимметрическим*, если $\omega(v_1,\dots,v_m) = 0$, как только $v_i = v_j$ для каких-то $i \neq j$. Если $\operatorname{char} k \neq 2$, это условие эквивалентно тому, что ω меняет знак при перестановке любых двух аргументов.

Пространство кососимметричных полилинейных отображений из V^k в k обозначается $\bigwedge^k V^*$ (поскольку оно канонически изоморфно k-ой внешней степени пространства V^*).

Если $\dim V = n$, то $\dim \bigwedge^k V = \binom{n}{k}$ и $\bigwedge^k V = 0$ при $k > n$.

Определение 29.9. Пусть $\lambda \in \wedge^k V^*$, $\mu \in \wedge^m V^*$. *Внешним произведением* λ и μ называется кососимметричное отображение $\lambda\wedge\mu =\in \wedge^{k+m}V^*$, определенное следующим образом. Обозначим через A множество всевозможных разбиений вида $\{1,2,\dots,k+m\} = S \sqcup T$, где S состоит из k элементов, а T — из m элементов (таким образом, всего таких разбиений будет $\binom{k+m}{k}$). Для каждого разбиения $\alpha \in A$ зафиксируем какое-нибудь упорядочение множества S_α и множества T_α (в понятных обозначениях). Тогда

$$(\lambda \wedge \mu)(v_1, \ldots, v_{k+m}) = \sum_{\alpha \in A} \varepsilon \cdot \lambda(v_{s_1}, \ldots, v_{s_k})\mu(v_{t_1}, \ldots, v_{t_m});$$

здесь $s_1, \ldots, s_k$ (соотв. $t_1, \ldots, t_m$) — элементы множества S_α (соотв. T_α), перечисленные в выбранном нами порядке, а ε — знак перестановки $s_1, \ldots, s_k, t_1, \ldots, t_m$.

Нетрудно проверить, что полилинейная форма $\lambda \wedge \mu$ действительно кососимметрична и не зависит от выбора упорядочений на S_α и T_α.

Пример 29.10. Если $\lambda, \mu \in \bigwedge^2 V^*$, то

$$(\lambda \wedge \mu)(x, y, z, t) = \lambda(x, y)\mu(z, t) - \lambda(x, z)\mu(y, t) + \lambda(z, t)\mu(x, y) + \\ + \lambda(z, x)\lambda(y, t) + \lambda(y, z)\lambda(x, t) - \lambda(x, z)\lambda(y, t).$$

В дальнейшем мы будем использовать такое соглашение: если $\omega \in \wedge^l V^*$, будем писать, что $\deg \omega = l$.

Легко проверяются следующие свойства внешнего произведения:

Дистрибутивность: $(\lambda_1 + \lambda_2) \wedge \mu = \lambda_1 \wedge \mu + \lambda_2 \wedge \mu$;

Ассоциативность: $(\omega \wedge \lambda) \wedge \mu = \omega \wedge (\lambda \wedge \mu)$.

Кососоммутативность: $\lambda \wedge \mu = (-1)^{\deg \lambda \deg \mu} \mu \wedge \lambda$.

Отметим еще следующий легко проверяемый факт: если $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in V^*$ и $v_1, \ldots, v_л \in V$, то

$$(\lambda_1 \wedge \ldots \wedge \lambda_n)(v_1, \ldots, v_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign}(\sigma) \lambda_1(v_{\sigma(1)}) \ldots \lambda_n(v_{\sigma(n)}),$$

где через $\operatorname{sign}(\sigma)$ обозначен знак перестановки σ.

Пусть $\langle e^1, \ldots, e^n \rangle$ — базис пространства V, и пусть $\langle e_1, \ldots, e_n \rangle$ — дуальный базис пространства V^*. Каждое m-элементное подмножества $S \subset \{1, 2, \ldots, n\}$ можно единственным образом записать в виде $S = \{i_1, \ldots, i_m\}$, где $i_1 < i_2 < \cdots < i_m$. Положим $e_S = e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \cdots \wedge e_{i_m} \in \wedge^m V^*$. Тогда всевозможные e_S, где S пробегает все m-элементные подмножества в $\{1, 2, \ldots, n\}$, образуют базис пространства $\wedge^m V^*$.

Формы произвольной степени

Определение 29.11. *Дифференциальной формой степени* k (синоним: k-форма) на многообразии X называется отображение ω, которое каждой точке $x \in X$ ставит в соответствие кососимметричное полилинейное отображение $\omega_x \in \wedge^k \mathcal{T}^*_{X,x}$ таким образом, что ω_x гладко зависит от x.

Множество k-форм на многообразии X обозначается $\Omega^k(X)$. так же, как и $\Omega^1(X)$, оно является $\mathcal{O}(X)$-модулем. Ясно, что $\Omega^k(X) = 0$ при $k > \dim X$. Мы иногда будем писать $\Omega^0(X)$ вместо $\mathcal{O}(X)$.

В локальных координатах k-форма записывается как

$$\omega = \sum_S f_S dx_S,$$

где S пробегает все k-элементные подмножества множества $\{1, 2, \ldots, n\}$, и где $dx_S = dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$, если $S = \{i_1, \ldots, i_k\}$ и $i_1 < i_2 < \cdots < i_k$.

Дифференциальные формы можно перемножать так же, как и кососимметрические полилинейные формы:

Определение 29.12. Пусть $\omega \in \Omega^k(X)$, $\eta \in \Omega^l(X)$. Тогда *внешним произведением* этих дифференциальных форм называется форма $\omega \wedge \eta \in \Omega^{k+l}(X)$, определенная по правилу

$$(\omega \wedge \eta)_x = \omega_x \wedge \eta_x.$$

Умножение функции на форму мы также будем считать внешним произведением (из $\Omega^0(X) \times \Omega^k(X)$ в $\Omega^k(X)$).

Для форм произвольной степени можно очевидным образом определить обратный образ, аналогичный обратному образу 1-форм:

Определение 29.13. Пусть $\varphi \colon X \to Y$ — гладкое отображение и $\omega \in \Omega^k(X)$. Тогда *обратным образом формы* ω *при отображении* φ называется k-форма $\varphi^*\omega \in \Omega^k(Y)$, определенная по формуле

$$(\varphi^*\omega)_x(v_1, \ldots, v_k) = \omega_{\varphi(x)}(f_* v_1, \ldots, f_* v_k).$$

где через $\varphi_* \colon \mathcal{T}_x X \to \mathcal{T}_{f(x)} Y$ обозначена, как обычно, производная отображения φ в точке x.

Следующее утверждение очевидно (и относится к линейной алгебре):

Предложение 29.14. *Пусть $\varphi\colon X \to Y$ — гладкое отображение, ω и η — дифференциальные формы на X. Тогда $f^*(\omega\wedge\eta) = f^*(\omega)\wedge f^*(\eta)$.*

Наша ближайшая цель — определить для всех k отображения $d^k\colon \Omega^k(X) \to \Omega^{k+1}(X)$, обобщающие известное нам отображение $d\colon \mathcal{O}(X) = \Omega^0(X) \to \Omega^1(X)$.

Предложение 29.15. *Для всякого многообразия X и всякого целого неотрицательного числа k можно образом определить $\mathbb{R}$-линейное отображение $d^k_X : \Omega^k(X) \to \Omega^{k+1}(X)$, таким образом, чтобы этот набор отношений обладающих следующими свойствами*

Естественность: *если $\varphi\colon X \to Y$ — гладкое отображение, то $\varphi^*(d^k_Y\omega) = d^k_X(f^*\omega)$.Иными словами, коммутативны следующие диаграммы:*

$$
\begin{tikzcd}
\Omega^{k+1}(X) & \Omega^{k+1}(Y) \arrow[l, "\varphi^*"'] \\
\Omega^k(X) \arrow[u, "d^k_X"] & \Omega^{k+1}(Y) \arrow[l, "\varphi^*"] \arrow[u, "d^k_Y"']
\end{tikzcd}
$$

Нормировка: $d^0_X(f) = df$ *для всех* $f \in \mathcal{O}(X) = \Omega^0(X)$.

Тождество Лейбница: $d^k_X(\omega\wedge\eta) = d^k_X(\omega)\wedge\eta + (-1)^{\deg\omega}\omega\wedge d^k_X\eta$.

Нулевой квадрат: $d^{k+1}_X \circ d^k_X = 0$.

Более того, набор отображений d^i_X (для всех i и X), обладающий этими свойствами, единствен.

Замечание 29.16. Существующие в силу предложения 29.15 отображения d^k_X называются *операторами внешнего дифференцирования;* на практике при записи операторов внешнего дифференцирования опускается как нижний индекс X (всегда), так и верхний индекс k (почти всегда). Мы тоже не будем отступать от этой традиции.

Доказательство. Начнем с единственности. Пусть операторы внешнего дифференцирования (для всех степеней и всех многообразий) построены. Заметим, что из тождества Лейбница по индукции вытекает равенство

$$d(\omega_1\wedge\ldots\wedge\omega_r) = (d\omega_1)\wedge\omega_2\ldots\wedge\omega_r + (-1)^{\deg\omega_1}\omega_1\wedge(d\omega_2)\wedge\omega_3\wedge\ldots\omega_r + (-1)^{\deg\omega_1+\deg\omega_2}\omega_1\wedge\omega_2\wedge(d\omega_3)\wedge\ldots\wedge \tag{29.2}$$

(всякий раз, когда d перескакивает через форму ω, добавляется множитель $(-1)^{\deg\omega}$).

Далее, из свойства естественности, примененного к вложению $i\colon U \to X$, где U — открытое подмножество, получаем, что $(d\omega)|_U = d(\omega|_U)$. Стало быть, внешний дифференциал всякой формы $\omega \in \Omega^k(X)$ однозначно определяется дифференциалами ограничений формы на все координатные окрестности; остается показать, что эти ограничения также определены однозначно. Поскольку, опять же ввиду свойства естественности, взятие внешнего дифференциала коммутирует с обратным образом относительно диффеоморфизма, являющегося локальной картой, достаточно показать, что внешний дифференциал однозначно определен на многообразиях, являющихся открытыми подмножествами в $\mathbb{R}^n$. Для этого заметим, что всякая k-форма на области в $\mathbb{R}^n$ представляется в виде суммы конечного числа слагаемых вида $f dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$; из формулы (29.2) и свойств нормировки и нулевого квадрата внешний дифференциал такого слагаемого равен $df \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$, где df понимается в смысле определения 29.3. Это выражение определено однозначно, что и завершает доказательство единственности.

Теперь докажем существование. Для этого для начала определим дифференциалы форм на меньшей категории: открытых подмножествах в $\mathbb{R}^n$ (при всевозможных n). Именно, поскольку в области $U \subset \mathbb{R}^n$ всякая k-форма однозначно представляется в виде суммы слагаемых вида $f dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$. Определим дифференциалы для этих слагаемых; определим их следующим (единственно возможным, как мы только что видели) способом:

$$d(f dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}) = df \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k};$$

на произвольные формы продолжим по линейности.

Выполнимость свойства нормировки при таком определении очевидна. Тождество Лейбница проверяется так. Пусть $\omega = f dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$, $\eta = g dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_l}$. Тогда

$$\omega \wedge \eta = fg dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \wedge dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_l}.$$

Теперь имеем:

$$\begin{aligned} d(\omega \wedge \eta) = d(fg) \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \wedge dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_l} = \\ = f dg \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \wedge dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_l} + \\ + g df \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \wedge dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_l}. \end{aligned}$$

Второе слагаемое равно в точности $d\omega \wedge \eta$, а первое получится из $\omega \wedge d\eta$, если перетащить 1-форму dg влево через k внешних сомножителей $dx_{i_1}, \ldots, dx_{i_k}$; в силу кососкоммутативности внешнего умножения форма $\omega \wedge d\eta$ умножится при этом на $(-1)^k$, откуда все и следует.

Проверим выполнимость тождества $d^2 = 0$. Заметим, во-первых, что $d(df) = 0$ для всякой функции (т. е. 0-формы): в самом деле,

$$d(df) = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i = \sum_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} dx_i \wedge dx_j,$$

и в правой части слагаемые с $dx_i \wedge dx_j$ и $dx_j \wedge dx_i$ сокращаются ввиду симметрии вторых производных. Пусть теперь ω — произвольная форма; можно считать, что $\omega = f dg_1 \wedge \ldots \wedge dg_k$. Тогда (пользуясь тождеством (29.2), верным, коль скоро верно тождество Лейбница, и равенством $d^2 = 0$ для функций) имеем

$$dd(f dg_1 \wedge \ldots \wedge dg_k) = d(df \wedge dg_1 \wedge \ldots \wedge dg_k) = 0.$$

Наконец, естественность вытекает из того, что с обратным образом коммутируют и внешнее произведение форм (предложение 29.14), и дифференциал функции (предложение 29.8).

Будем теперь «расширять плацдарм». Определим сначала дифференциал на многообразиях, диффеоморфных открытым подмножествам в $\mathbb{R}^n$. Пусть многообразие V диффеоморфно открытому подмножеству $U \subset \mathbb{R}^n$, причем $\varphi \colon V \to U$ — соответствующий диффеоморфизм. Тогда для формы ω на V положим (исходя из желания, чтобы выполнялось свойство естественности):

$$d\omega = \varphi^*(d(\varphi^{-1} * \omega)).$$

Покажем, что это определение корректно, то есть не зависит от выбора диффеоморфизма φ. В самом деле, любой другой диффеоморфизм имеет вид $h \circ \varphi$, где $h \colon U \to U$ — диффеоморфизм; имеем

$$\begin{aligned}(h \circ \varphi)^*(d(h^{-1} \circ \varphi^{-1})^* \omega) = \varphi^* \circ h^* d(h^{-1*} \circ \varphi^{-1*})\omega = \\ = \varphi^* \circ h^* \circ h^{-1*}(d(\varphi^{-1} * \omega)) = \varphi^*(d(\varphi^{-1} * \omega))\end{aligned}$$

(мы переставили d и h^{-1*} ввиду доказанной естественности дифференциала на открытых подмножествах в $\mathbb{R}^n$). Четыре свойства так определенного дифференциала на многообразиях, диффеоморфных открытым множествам в евклидовых пространствах, из этого определения получается с очевидностью.

Распространим, наконец, определение дифференциала на произвольные многообразия. Пусть ω — форма на многообразии X. Определим $d\omega$ следующим образом. Для всякого открытого $U \subset X$, диффеоморфного открытому подмножеству в $\mathbb{R}^n$, положим $\eta_U = d(\omega|_U)$; поскольку из свойства естественности вытекает, что $\eta_U|_{U \cap V} = \eta_V|_{U \cap V}$ для любых U и V, так что все η_U склеиваются в одну форму η; положим $\eta = du$.

Поскольку все четыре свойства дифференциала можно проверять локально, а для многообразий, диффеоморфных открытым подмножествам в евклидовых пространствах, мы их уже установили, все доказано. $\square$