Лекция 30. Интегрирование форм по цепям

Сейчас мы введем те «k-мерные объекты», по которым можно интегрировать дифференциальные формы степени k.

Определение 30.1. Пусть X — гладкое многообразие. *k-мерной поверхностью в X* называется пара (U, φ), где $U \subset \mathbb{R}^k$ — открытое подмножество и $\varphi\colon U \to \mathbb{R}^n$ — гладкое отображение.

Разумеется, геометрически наша k-мерная поверхность (точнее, ее образ при отображении φ) гладким подмногообразием в X быть не обязана (например, $X = \mathbb{R}^2$, $U = \mathbb{R}$, $\varphi(t) = (t^2, t^3)$).

Определение 30.2. Пусть (U, φ) — k-мерная поверхность в многообразии X и $\omega \in \Omega^k(X)$. Тогда *интегралом* от формы ω по этой поверхности называется число $\int_U f\,dy_1 \dots dy_k$, где $\varphi^*\omega = f dy_1 \wedge \dots \wedge dy_k$.

Определенный таким образом интеграл почти не зависит от выбора параметризации φ:

Предложение 30.3. *Пусть (U, φ) — k-мерная область в многообразии X и пусть $\psi\colon V \to U$ — диффеоморфизм* со всюду положительным якобианом, *где $V \subset \mathbb{R}^k$ — открытое множество. Тогда для всякой формы $\omega \in \Omega^k(X)$ интегралы от нее по k-мерным поверхностям (U, φ) и $(V, \varphi \circ \psi)$ совпадают.*

Доказательство. Пусть $\varphi^*\omega = f dy_1 \wedge \dots \wedge dy_k$. Тогда $(\varphi \circ \psi)^*\omega = \psi^*(\varphi^*\omega) = (f \circ \psi) \cdot J(\psi) dy_1 \wedge \dots \wedge dy_k$, где через ψ обозначен якобиан отображения ψ. Нам нужно проверить, что $\int_U f\,dy_1 \dots dy_k = \int_V (f \circ \psi) \cdot J(\psi) dy_1 \wedge \dots \wedge dy_k$; поскольку, по условию, $J(\psi) > 0$ всюду на V, это равенство немедленно следует из теоремы о замене переменной в интеграле. $\square$

Итак, интегралы по нашим «k-мерные поверхностям» не меняются при замене параметризации на другую, отличающуюся на диффеоморфизм с положительным якобианом («сохраняющий ориентацию»). Например, «одномерные поверхности» в смысле нашего определения имеет смысл называть ориентированными кривыми; интеграл от 1-формы по кривой не зависит от того, с какой скоростью (и равномерно или нет) точка бежит по кривой, но зависит от направления движения. Если же мы проведем замену параметра с отрицательным якобианом («обратим ориентацию»), то интеграл, как легко понять, сменит знак на противоположный.

Теперь дадим предварительную формулировку основной «теоремы».

Утверждение 30.4 (теорема Стокса: предварительная форма). *Пусть V — k-мерная поверхность в многообразии X, и пусть ∂V — граница этой k-мерной поверхности. Тогда для всякой $\omega \in \Omega^{k-1}(X)$ имеет место равенство*

$$\int_{\partial V} \omega = \int_V d\omega.$$

Слово «теорема» мы взяли в кавычки, поскольку у нас нет определения границы k-мерной поверхности, а при попытке такое определение дать возникают трудности. Видимо, невозможно дать общее определение границы k-мерной поверхности в смысле определения 30.1 так, чтобы эта граница оказалась $k-1$-мерной поверхностью. Впрочем, никто к этому и не стремится: упомянутая трудность не преодолевается, но обходится. Именно, наивное определение 30.1 модифицируется таким образом, чтобы у объекта, по которому интегрируются k-формы, было удобно определить край. Таких уточнений понятия k-мерной поверхности в многообразии известно по крайней мере два. Одно из них называется «гладкая сингулярная цепь», а другое — «ориентированное многообразие с краем». Соответственно, получаются две теории интегрирования дифференциальных форм, для каждой из которых верно утверждение 30.4. Мы рассмотрим обе теории. Начнем с сингулярных цепей.

Соглашение 30.5. Пусть M — произвольное подмножество в $\mathbb{R}^k$ и X — гладкое многообразие. Будем говорить, что отображение $\varphi\colon M \to X$ является гладким, если его можно продолжить на какое-то открытое множество $U \supset M$ так, чтобы продолженное отображение было гладким в обычном смысле.

Определение 30.6. *Стандартным k-мерным симплексом* называется подмножество $\Delta_k \subset \mathbb{R}^{k+1}$, являющееся выпуклой оболочкой точек $e_0, e_1, \ldots, e_k$, где e_0 — начало координат, а e_i при $1 \leqslant i \leqslant k$ — точка, у которой i-я координата равна единице, а остальные — нулю.

Определение 30.7. Пусть X — гладкое многообразие. *Гладким сингулярным k-мерным симплексом в X* называется гладкое (в смысле соглашения 30.5) отображение $\sigma\colon \Delta_k \to X$.

Замечание 30.8. Если заменить в этом определении слово «гладкое» на «непрерывное», то получится определение сингулярного симплекса, имеющее смысл для любых топологических пространств. Негладкие сингулярные симплексы также активно используются, но не для интегрирования, а для построения теории гомологий. Часто мы будем называть гладкие сингулярные симплексы просто сингулярными симплексами.

Определение 30.9. Пусть σ — (гладкий) k-мерный сингулярный симплекс на многообразии X и $\omega \in \Omega^k(X)$. *Интегралом формы ω по симплексу σ* называется интеграл формы ω по k-мерной поверхности $(\mathrm{Int}(\Delta_k), \sigma|_{\mathrm{Int}(\Delta_k)})$ в смысле определения 30.2. Обозначение: $\int_\sigma \omega$.

Заметим, что интеграл формы по симплексу всегда существует, так как функция f, определенная равенством $\sigma^*\omega = f dy_1 \wedge \cdots \wedge dy_k$, непрерывно продолжается на компактное множество Δ_n и тем самым ограничена.

Сингулярные симплексы — это что-то вроде «криволинейных треугольников» (тетраэдров и т. д.) в многообразии. Мы определили интегралы по этим криволинейным треугольникам; чтобы интегрировать по более сложным фигурам, надо их разбить на сингулярные симплексы. Это разбиение формализуется в следующих определениях.

Определение 30.10. *k-мерной сингулярной цепью* на многообразии X называется формальная (конечная) линейная комбинация k-мерных сингулярных симплексов с действительными коэффициентами.

Определение 30.11. Пусть $\sigma = \sum_i \sigma_i$ — k-мерная сингулярная цепь на многообразии X и $\omega \in \Omega^k(X)$. *Интегралом* формы ω по цепи σ называется число $\int_\sigma \omega = \sum_i n_i \int_{\sigma_i} \omega$.

Мы ввели сингулярные цепи ради того, чтобы было удобно определять их границы. Вот как это делается.

Определение 30.12. Пусть σ — k-мерный сингулярный симплекс на многообразии X, и пусть $i \in \{0, 1, \ldots, k\}$. *$i$-ой гранью* сингулярного симплекса σ называется $k-1$-мерный сингулярный симплекс $\partial_i(\sigma) = \sigma \circ \tau_i \colon \Delta_{k-1} \to \mathbb{R}^n$, где отображение $\tau_i \colon \Delta_{k-1} \to \Delta$ есть аффинное отображение, переводящее $e_0(\Delta_{k-1})$ в $e_0(\Delta_k)$,..., $e_{i-1}(\Delta_{k-1})$ в $e_{i-1}(\Delta_k)$, $e_i(\Delta_{k-1})$ в $e_{i+1}(\Delta_k)$,..., $e_{k-1}(\Delta_{k-1})$ в $e_k(\Delta_k)$.

Определение 30.13. *Границей* k-мерного сингулярного симплекса σ называется $k-1$ мерная сингулярная цепь

$$\partial\sigma = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \partial_i \sigma.$$

Границей k-мерной сингулярной цепи $\sigma = \sum n_i\sigma_i$ называется $k-1$ мерная сингулярная цепь
$$\partial\sigma = \sum n_i\partial\sigma_i.$$

К этому определению необходим комментарий. Несомненно, граница k-мерного симплекса сложена из его граней; вопрос в том, почему этим граням приписываются именно такие знаки. Объяснение тут следующее. С точки зрения интегрирования форм, сингулярные симплексы суть подмножества (определенного вида) в X, снабженные ориентацией. При этом, чтобы задать ту или иную ориентацию симплекса, надо выбрать какой-то порядок перечисления его вершин. С точки зрения наших определений это выглядит так. Если s — перестановка множества $\{0, 1, \dots, k\}$, то сингулярному симплексу σ можно поставить в соответствие симплекс $\sigma \circ f_s$, где $f_s\colon \Delta_k \to \Delta_k$ — аффинный автоморфизм стандартного симплекса, задающийся перестановкой s. Если перестановка s четна, то предложение 30.3 показывает, что $\int \sigma \circ f_s\omega = \int_\sigma \omega$ для всякой $\omega \in \Omega^k(X)$; если же s — нечетная перестановка, то якобиан преобразования f_s равен -1, и для всякой k-формы ω имеем
$$\int \sigma \circ f_s\omega = -\int_\sigma \omega = \int_{-\sigma} \omega$$
(см. определение 30.11). Стало быть, ориентация симплекса — это просто порядок нумерации его вершин, причем порядки, отличающиеся на четную перестановку, не различаются.

Границу симплекса также необходимо снабдить ориентацией, разумным образом согласованной с ориентацией самого симплекса. Эти согласованные ориентации выбираются следующим образом: на грани номер i (выпуклая оболочка всех вершин, кроме i-ой — см. определение 30.12) выбирается такая нумерация вершин, чтобы нумерация вершин всего симплекса в порядке «сначала i-я вершина, затем вершины i-ой грани в выбранном порядке» определяла исходную ориентацию симплекса. Нетрудно понять, что определение 30.13 соответствует этому словесному описанию.

Читателю рекомендуется самостоятельно сделать чертежи для случаев $k = 2$ и 3. В первом случае он увидит, что ориентация границы треугольника по определению 30.13 задает ее обход в одном направлении (против часовой стрелки, если ориентация самого треугольника задается обходом его вершин в направлении против часовой стрелки). Во втором случае грани тетраэдра окажутся ориентированными таким образом, что при взгляде изнутри тетраэдра направление обхода вершин всех граней будет одинаковым (либо все по часовой стрелке, либо все против часовой).

Еще одно оправдание выбора знаков для границы симплекса содержится в следующем предложении. Его неформальный смысл таков. Если знаки для граней, составляющих границу симплекса, выбраны разумно, то эта граница должна составлять «единое целое» и у нее границы быть уже не должно. Так оно и происходит:

Предложение 30.14. *$\partial(\partial\sigma)=0$ для любой сингулярной цепи σ.*

Доказательство. Достаточно доказывать для случая, когда σ — сингулярный симплекс. Заметим, что $\partial(\partial\sigma)$ является суммой (с какими-то коэффициентами) «граней коразмерности два» (граней граней) симплекса σ. При этом легко понять, что грань коразмерности 2, полученная удалением вершин с номерами i и j, где $i<j$, встречается в этой сумме ровно два раза: первый раз как слагаемое в $\partial_i(\partial_j\sigma)$, и второй раз — как слагаемое в $\partial_j(\partial_i\sigma)$. В первом случае перед ней стоит коэффициент $(-1)^{i+j}$, а во втором $(-1)^{i+j-1}$, так что все слагаемые в $\partial(\partial\sigma)$ сокращаются. $\square$

Теперь мы можем сформулировать теорему, уточняющую неформальное утверждение 30.4.

Теорема 30.15 (теорема Стокса, первый вариант). *Пусть σ — сингулярная k-цепь на многообразии X и $\omega\in\Omega^{k-1}(X)$. Тогда $\int_{\partial\sigma}\omega=\int_\sigma d\omega$.*

Доказательство. Из определений интеграла по цепи и границы цепи ясно, что достаточно доказать теорему для случая, когда $\sigma\colon\Delta_k\to X$ — сингулярный симплекс. При этом, поскольку внешнее дифференцирование коммутирует со взятием обратного образа, можно считать, что ω — дифференциальная форма на окрестности стандартного симплекса $\Delta_k\subset\mathbb{R}^k$. Еще раз пользуясь линейностью, получаем, что можно считать, что $\omega=f\,dx_1\wedge\dots\wedge\widehat{dx_i}\wedge\dots\wedge dx_k$, где $1\leqslant i\leqslant k$ (шляпка над сомножителем означает, что он опущен). Тогда $d\omega=(-1)^{i-1}\frac{\partial f}{\partial x_i}dx_1\wedge\dots\wedge dx_k$, и правая часть равенства, которое мы должны доказать, имеет вид

$$(-1)^{i-1}\int_{\Delta_k}\frac{\partial f}{\partial x_i}\,dx_1\dots dx_k.$$

Однако же ограничение формы $dx_1\wedge\dots\wedge\widehat{dx_i}\wedge\dots\wedge dx_k$ на каждую грань симплекса Δ_k, кроме ∂_0 и ∂_i, равно нулю, так что левая часть доказываемой формулы равна

$$\int_{\partial_0\Delta_k}\omega + (-1)^i\int_{\partial_i\Delta_k}\omega. \qquad (30.1)$$

Второе слагаемое в (30.1) равно просто

$$(-1)^i\int_{\Delta_{k-1}} f(y_1,\dots,y_{i-1},0,y_i,\dots,y_{k-1})\,dy_1\dots dy_{k-1},$$

а первое слагаемое мы вычислим непосредственно по определению. Именно, аффинное отображение из Δ_{k-1} в $\partial_0\Delta_k$, сохраняющее порядок вершин, имеет вид

$$\psi\colon (y_1,\dots,y_{k-1})\mapsto(1-y_1-\dots-y_{k-1},y_1,\dots,y_{k-1});$$

стало быть,

$$\psi^*\omega=(-1)^{i-1}f(1-y_1-\dots-y_{k-1},y_1,\dots,y_{k-1})dy_1\wedge\dots\wedge dy_{k-1},$$

так что первое слагаемое в (30.1) равно

$$(-1)^{i-1}\int_{\Delta_{k-1}} f(1-y_1-\dots-y_{k-1},y_1,\dots,y_{k-1})\,dy_1\dots dy_k.$$

Сделаем в этом интеграле замену $y_1=z_2$, $y_2=z_3$, $\dots$, $y_{i-1}=1-z_1-\dots-z_{k-1}$, $y_i=z_i$, $\dots$, $y_{k-1}=z_{k-1}$. Эта замена переводит симплекс Δ_{k-1} в себя, а абсолютная величина ее якобиана равна 1, так что первое слагаемое в (30.1) равно

$$(-1)^{i-1}\int_{\Delta_{k-1}} f(z_1,\dots,z_{i-1},1-z_1-\dots-z_{k-1},z_i,\dots,z_k)\,dz_1\dots dz_k.$$

Стало быть, все сводится к доказательству такого равенства:

$$\begin{aligned}&(-1)^{i-1}\int_{\Delta_k}\frac{\partial f}{\partial x_i}\,dx_1\dots dx_k=\\&(-1)^{i-1}\int_{\Delta_{k-1}} f(z_1,\dots,z_{i-1},1-z_1-\dots-z_{k-1},z_i,\dots,z_k)\,dz_1\dots dz_k+\\&\qquad+(-1)^i\int_{\Delta_{k-1}} f(y_1,\dots,y_{i-1},0,y_i,\dots,y_{k-1})\,dy_1\dots dy_{k-1}.\end{aligned}$$

Если умножить обе части этого равенства на $(-1)^i$, то оно станет очевидно как прямое следствие теоремы Фубини (сначала интегрируем по dy_i, причем этот интеграл вычисляется по формуле Ньютона-Лейбница). $\square$