Лекция 31. Интегрирование форм по многообразиям

На этой лекции будет построена вторая теория интегрирования дифференциальных форм. На сей раз мы будем интегрировать формы по «ориентированным многообразиям с краем». Начнем с определений.

Определение 31.1. Пусть V — конечномерное векторное пространство над $\mathbb{R}$. *Ориентацией* пространства V называется класс эквивалентности его базисов относительно следующего отношения: два базиса считаются эквивалентными (*одинаково ориентированными*), если матрица перехода между ними имеет положительный определитель. Векторное пространство, на котором выбрана ориентация, называется *ориентированным.*

Ясно, что у векторного пространства имеются ровно две ориентации. Если $f\colon V_1 \to V_2$ — изоморфизм векторных пространств, причем V_1 ориентировано, то изоморфизм f индуцирует ориентацию на V_2 (образ «положительно ориентированного» базиса в V_1 объявляется положительно ориентированным базисом в V_2).

Определение 31.2. Пусть X — гладкое многообразие. *Ориентация многообразия* X — это выбор ориентации в касательном пространстве $\mathcal{T}_x$ для каждой точки $x \in X$; при этом требуется, чтобы ориентация в $\mathcal{T}_x$ непрерывно зависела от x. Многообразие, на котором можно задать ориентацию, называется *ориентируемым*, а многообразие, на котором задана ориентация, — *ориентированным.*

Как водится, в определении такого типа необходимо уточнить, что означает, что ориентация непрерывно зависит от точки. Ответ таков: если $U \subset X$ — координатная окрестность с локальными координатами $x_1, \ldots, x_n$, то непрерывная зависимость ориентации от точки означает, что у базиса из касательных векторов $\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}$ ориентация одинакова (всегда положительна или всегда отрицательна) во всех точках U. Поскольку якобианы функций перехода не обращаются в нуль и тем самым сохраняют постоянный знак, из выполнимости этого условия в одной координатной окрестности следует его выполнимость и в любой другой.

Предупреждение 31.3. Как мы вскоре увидим, ориентацию можно задать не на всяком многообразии.

Разумеется, всякое открытое подмножество в $\mathbb{R}^n$ ориентируемо. Вот менее тривиальный пример.

Предложение 31.4. *Пусть* $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *— гладкая функция,* $X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = 0\}$, *и пусть* $f'(x) \neq 0$ *для всех* $x \in X$. *Тогда многообразие* X *ориентируемо.*

Доказательство. Ввиду предложения 20.2 X является гладким подмногообразием в $\mathbb{R}^n$; более того, для всякой точки подмногообразия X существует содержащее ее открытое множество $U \subset \mathbb{R}^n$ и диффеоморфизм $\varphi\colon U \to V$, где $V \subset \mathbb{R}^n$ — открытое множество, обладающий тем свойством, что $\varphi(X \cap U) = \{(y_1, \dots, y_n) \in V \mid y_1 = 0\}$, причем $y_1 = f \circ \varphi^{-1}$. Теперь зафиксируем ориентацию на $\mathbb{R}^n$ и будем говорить, что базис $v_1, \dots, v_{n-1}$ в $\mathcal{T}_x X$ положительно ориентирован, если положительно ориентирован базис $\frac{\partial}{\partial x_1}, \varphi'(v_1), \dots, \varphi'(v_{n-1})$. Непрерывность очевидна. □

Пример 31.5. Пусть $X = S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ (единичная сфера). Поскольку ее можно задать уравнением $x_1^2 + \ldots + x_{n+1}^2 - 1 = 0$, удовлетворяющим условию предложения 31.4, сфера ориентируема. Более того, из доказательства этого предложения явствует, что эту ориентацию можно задать следующим образом. Зафиксируем какую-нибудь ориентацию в $\mathbb{R}^{n+1}$; для каждой точки $x = (x_1, \dots, x_{n+1}) \in S^n$ пусть $e_x = (x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathcal{T}_x\mathbb{R}^{n+1} \cong \mathbb{R}^{n+1}$ (изоморфизм естественный). (Иными словами, e_x — единичный вектор, перпендикулярный сфере в точке x и направленный «наружу».) Легко видеть, что базис $(v_1, \dots, v_n)$ в $\mathcal{T}_x S^n \subset \mathcal{T}_x\mathbb{R}^{n+1}$ положительно ориентирован, если базис $(e_x, v_1, \dots, v_n)$ в $\mathcal{T}_x\mathbb{R}^{n+1} \cong \mathbb{R}^{n+1}$ положительно ориентирован относительно выбранной нами ориентации в $\mathbb{R}^{n+1}$.

«Антиподальное отображение» ι, переводящее точку сферы в диаметрально противоположную, сохраняет эту ориентацию при нечетных n и обращает ее при четных n. В самом деле, $\iota_*(e_x) = e_{\iota(x)}$, так что если $(v_1, \dots, v_n)$ — базис в $\mathcal{T}_x X$, то базис $(\iota_*(v_1), \dots, \iota_*(v_n))$ ориентирован так же, как базис $(v_1, \dots, v_n)$, тогда и только тогда, когда отображение $x \mapsto -x$, действующее из $\mathbb{R}^{n+1}$ в $\mathbb{R}^{n+1}$, сохраняет ориентацию.

Приведем несколько простых критериев ориентируемости.

Предложение 31.6. *Связное многообразие* X *ориентируемо тогда и только тогда, когда его можно покрыть таким семейством координатных окрестностей, что все функции перехода имеют положительный якобиан.*

Доказательство. Пусть многообразие X покрыто семейством локальных карт $\varphi\colon U \to V \subset \mathbb{R}^n$ с сохраняющими ориентацию функциями перехода. Выберем какую-нибудь ориентацию на $\mathbb{R}^n$ и перенесем ее с помощью всевозможных $(\varphi^{-1})_*$ на каждую из координатных окрестностей $U \subset X$. Поскольку якобианы функций перехода положительны, ориентация каждого касательного пространства $\mathcal{T}_x X$ не зависит от того, с помощью какой из содержащих x координатных окрестностей она вводилась. Тем самым получаем отображение из X в $\tilde{X}$, действующее по правилу $x \mapsto (x, \varepsilon_x)$, где ε_x — введенная по вышеописанному правилу ориентация на $\mathcal{T}_x X$.

Обратно, пусть X ориентировано и $X = \bigcup_\alpha U_\alpha$ — покрытие связными координатными окрестностями. Зафиксируем ориентацию в $\mathbb{R}^n$ и модифицируем локальные координаты так. Если диффеоморфизм $\varphi_\alpha\colon U_\alpha \to V_\alpha \subset \mathbb{R}^n$ сохраняет ориентацию, то ничего с ним делать не будем, а если обращает, то скомпонуем его с отражением $\mathbb{R}^n$ относительно какой-нибудь гиперплоскости. В результате получится система локальных карт, сохраняющих ориентацию; стало быть, и все функции перехода будут сохранять ориентацию. □

Предложение 31.7. *Гладкое многообразие размерности n ориентируемо тогда и только тогда, когда на нем существует дифференциальная форма степени n, нигде не обращающаяся в нуль.*

Доказательство. Пусть ω — форма с таким свойством; зададим на X ориентацию следующим образом. Будем называть базис $v_1, \ldots, v_n$ в $\mathcal{T}_x X$ положительно ориентированным, если $\omega_x(v_1, \ldots, v_n) > 0$. Тем самым на всех касательных пространствах ориентация задана; в локальных координатах имеем $\omega = f dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$, где функция f знакопостоянна на (связной) координатной окрестности, откуда следует, что знак $\omega_x(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n})$ постоянен на координатной окрестности и наше определение ориентации корректно.

Пусть, напротив, многообразие X ориентируемо. Покроем X семейством координатных окрестностей $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \mathrm{A}}$ и на каждой U_α построим форму ω_α степени n, нигде не обращающуюся в нуль и положительную на положительно ориентированных базисах — это возможно, т. к. все U_α диффеоморфны открытым подмножествам в $\mathbb{R}^n$. Рассмотрим теперь разбиение единицы $\{\varphi_\beta\}_{\beta \in \mathrm{B}}$, подчиненное покрытию $\{U_\alpha\}$. Для каждого $\beta \in \mathrm{B}$ выберем такое $i(\beta) \in \mathrm{A}$, что $\operatorname{supp} \varphi_\beta \subset U_\alpha$. Положим теперь $\omega = \sum_\beta \varphi_\beta \omega_{i(\beta)}$ (точнее говоря, суммируются на сами формы $\varphi_\beta \omega_{i(\beta)}$, а их продолжения нулем на все X). Ясно, что ω положительна на положительно ориентированных базисах и тем самым не обращается в нуль. □

Приведем теперь еще один, более абстрактный, критерий ориентируемости.

Определение 31.8. Пусть X — связное гладкое n-мерное многообразие. *Ориентирующим накрытием* многообразия X называется многообразие $\tilde{X}$ вместе с отображением $\pi\colon \tilde{X} \to X$, определенное следующим образом:

$\tilde{X}$ как множество. Как множество $\tilde{X}$ представляет собой множество пар (x, ε), где $x \in X$ и ε — одна из двух возможных ориентаций векторного пространства $\mathcal{T}_x X$; отображение π переводит пару (x, ε) в точку $x \in X$.

Локальные карты. Пусть $U \subset X$ — координатная окрестность с локальными координатами $\varphi\colon U \to V \subset \mathbb{R}^n$; выберем на нем ориентацию и рассмотрим множество пар $(x, \varepsilon) \in \tilde{X}$, где $x \in U$, а ε — соответствующая ориентация $\mathcal{T}_x U = \mathcal{T}_x X$. Функции перехода при этом будут теми же самыми, что для исходного многообразия X.

Топология. Подмножество в $\tilde{X}$ объявим открытым, если открыты в $\mathbb{R}^n$ все его пересечения с координатными окрестностями (точнее, образы этих пересечений относительно локальных карт). Равносильное описание: топология на $\tilde{X}$ — это наименее тонкая топология, при которой отображение π непрерывно.

Из определения очевидно, что отображение $\pi\colon \tilde{X} \to X$ является (двулистным) накрытием.

Предложение 31.9. *Многообразие ориентировано тогда и только тогда, когда его ориентирующее накрытие имеет сечение.*

Доказательство. «Только тогда»: если X ориентируемо, то выберем на нем ориентацию и определим сечение $s\colon X \to \tilde{X}$ по формуле $s\colon x \mapsto (x, \varepsilon)$, где ε — ориентация на $\mathcal{T}_x X$, индуцированная ориентацией многообразия.

«Тогда»: Пусть $s\colon X \to \tilde{X}$ — сечение; если $x \in X$ и $s(x) = (x, \varepsilon)$, выберем на $\mathcal{T}_x X$ ориентацию ε. □

Как известно, для всякого двулистного накрытия $\tilde{X} \to X$, где X связно, имеются две возможности: либо $\tilde{X}$ связно, и в этом случае сечения у накрытия нет, либо $\tilde{X}$ состоит из двух компонент связности, каждая из которых гомеоморфно (а в нашем случае и диффеоморфно) отображается на X, и в этом случае сечений ровно два. Стало быть, либо ориентации у связного многообразия вообще не существует, либо этих ориентаций ровно две штуки.

Следствие 31.10. *Всякое односвязное многообразие ориентируемо.*

Приведем теперь пример неориентируемого многообразия.

Пример 31.11. Покажем, что проективное пространство $\mathbb{RP}^n$ ориентируемо при нечетном n и неориентируемо при четном n.

Пусть сначала n нечетно. Зафиксируем какую-нибудь ориентацию на сфере S^n и рассмотрим естественную проекцию (двулистное накрытие) $p\colon S^n \to \mathbb{RP}^n$. Очевидно, $p \circ \iota = p$, где ι — антиподальное отображение из примера 31.5. Для каждой точки $x \in \mathbb{RP}^n$ выберем произвольным образом прообраз $y \in p^{-1}(x)$ и перенесем в $\mathcal{T}_x\mathbb{RP}^n$ ориентацию из $\mathcal{T}_Y S^n$ с помощью отображения p_*. Поскольку второй прообраз точки x равен $\iota(y)$ и отображение ι при нечетном n сохраняет ориентацию сферы, полученная таким образом ориентация на $\mathcal{T}_x X$ не зависит от выбора прообраза и тем самым определена корректно. Непрерывная зависимость ориентации от точки очевидна.

Пусть теперь n четно. По-прежнему зафиксируем ориентацию на S^n. На сей раз антиподальное отображение сферы ориентацию обращает (см. пример 31.5), так что, если y и $\iota(y)$ — два прообраза точки $x \in \mathbb{RP}^n$ при отображении p, то p_* индуцирует две противоположные ориентации на $\mathcal{T}_x\mathbb{RP}^n$ — одну с точки y, другую с точки $\iota(y)$. Стало быть, всякую пару (x, ε), где $x \in \mathbb{RP}^n$ и ε — ориентация на $\mathcal{T}_x\mathbb{RP}^n$, можно отождествить с одним из прообразов точки x при отображении p, то есть с точкой на сфере. Легко видеть, что это отождествление является диффеоморфизмом $u\colon S^n \to \widetilde{\mathbb{RP}^n}$, совместимым с проекциями на S^n (то есть $\pi \circ u = p$). Стало быть, $\mathbb{RP}^n$ при четном n ориентируемо тогда и только тогда, когда проекция $p\colon S^n \to \mathbb{RP}^n$ имеет сечение, а это неверно при любом n.

Теперь перейдем ко второму ингредиенту нашей теории — многообразиям с краем. Простейшим примером многообразия с краем является замкнутый n-мерный шар в $\mathbb{R}^n$.

Прежде, чем давать точные определения, договоримся, в расширение соглашения 30.5, что диффеоморфизмом двух произвольных подмножеств в $\mathbb{R}^n$ будет называться их гомеоморфизм, продолжающийся до диффеоморфизма некоторых их окрестностей.

Обозначение 31.12. Пусть

$$H^n = \{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 \geqslant 0 \}.$$

Подмножество $H^n \subset \mathbb{R}^n$ называется *замкнутым полупространством.*

Определение 31.13. *n-мерным многообразием с краем* называется хаусдорфово топологическое пространство X со счетной базой, наделенное следующей дополнительной структурой:

(1) X представлено в виде объединения открытых подмножеств U_α, называемых *координатными окрестностями.*

(2) Для каждой координатной окрестности U_α задан гомеоморфизм $\varphi_\alpha\colon U_\alpha \to V_\alpha$, где $V_\alpha \subset H^n$ — открытое подмножество.

(3) Пусть U_α и U_β — две координатные окрестности с непустым пересечением. Тогда отображение

$$\varphi_{\alpha\beta}\colon \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta),$$

заданное формулой $x \mapsto \varphi_\beta(\varphi_\alpha^{-1}(x))$, является диффеоморфизмом открытых подмножеств в H^n.

Так как диффеоморфизмы не-открытых множеств, как мы их определили, по определению продолжаются до диффеоморфизмов объемлющих открытых множеств, получаем, что при диффеоморфизме открытых подмножеств в H^n точки, лежащие на граничной гиперплоскости, переходят в точки, лежащие на граничной гиперплоскости[8]. Стало быть, все точки многообразия с краем делятся на два сорта: точки, образы которых в каких-то (стало быть, и любых) локальных координатах лежат внутри H^n и точки, образы которых в локальных координатах лежат на границе H^n. Множество точек второго типа называется *краем* многообразия X и обозначается ∂X. Ясно, что край n-мерного многообразия будет $n-1$-мерным многообразием (уже без края). (Множество точек первого типа, очевидно, является n-мерным многообразием без края.)

[8]То же верно, если заменить слово «диффеоморфизм» на «гомеоморфизм», но доказывать это надо по-другому.

Типичный пример многообразия с краем дается следующим предложением, доказательство которого оставляется читателю:

Предложение 31.14. *Пусть X — n-мерное гладкое многообразие (без края), и пусть f — гладкая функция на X. Предположим, что $f'(x) \neq 0$ в каждой из точек $x \in X$, для которых $f(x) = 0$. Тогда множество*

$$\{ x \in X \mid f(x) \geqslant 0 \}$$

является n-мерным многообразием с краем.

Нетрудно видеть, что при диффеоморфизмах и гладких отображениях открытых подмножеств в H^n корректно определены частные производные и, стало быть, матрицы Якоби. Поэтому на многообразиях с краем также можно определить дифференциальные формы (например, как выражения, записывающиеся в локальных координатах в виде $\sum f_{i_1,\dots,i_k} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$ и преобразующиеся по известным правилам при замене локальных координат). Далее, поскольку определены якобианы функций перехода, можно определить и ориентацию многообразия с краем (например, с помощью системы координатных окрестностей с положительными якобианами функций перехода).

Предложение-определение 31.15. Пусть X — ориентированное n-мерное многообразие с краем. Тогда на ∂X можно ввести *индуцированную ориентацию* следующим образом: объявим базис $(v_1, \dots, v_{n-1})$ в $\mathcal{T}_x \partial X$ положительно ориентированным, если положительно ориентирован базис в $\mathcal{T}_x X$ вида $(e, v_1, \dots, v_{n-1})$, где e — вектор в $\mathcal{T}_x X$, направленный «наружу» многообразия. Последнее, по определению, означает, что в каких-то (стало быть, и в любых) локальных координатах вектор e переходит в вектор $a_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + a_n \frac{\partial}{\partial x_n}$ с *отрицательным* a_1.

Нетрудно видеть, что это действительно корректное определение ориентации. В частности, при ином выборе «направленного наружу» вектора e ориентация базиса не изменится.

Теперь все готово для того, чтобы дать основные определения. Зафиксируем в $\mathbb{R}^n$ какую-нибудь ориентацию.

Предложение 31.16. *Пусть X — n-мерное ориентированное многообразие (возможно, с краем). Пусть $\varphi\colon U \to X$ — локальная карта, сохраняющая ориентацию, где $U \subset H^n$ — открытое подмножество, и пусть $\omega \in \Omega^n(X)$ — такая дифференциальная форма, что* $\operatorname{supp}\omega$ *компактен и содержится в $\varphi(U)$. Если $\varphi^*\omega = f dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$, то интеграл $\int_{\mathbb{R}^n} f\,dx_1 \dots dx_n$ не зависит от выбора сохраняющей ориентацию локальной карты.*

Доказательство. Пусть $\psi\colon V \to X$ — другая локальная карта, сохраняющая ориентацию и такая, что $\operatorname{supp}\omega \subset \psi(V)$; положим $\psi^*\omega = g dy_1 \wedge \dots \wedge dy_n$. Поскольку обе карты сохраняют ориентацию, якобиан $\frac{\partial(x_1,\dots,x_n)}{\partial(y_1,\dots,y_n)}$ положителен и тем самым совпадает со своей абсолютной величиной. Стало быть, по теореме о замене переменной имеем:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f\,dx_1\dots dx_n = \int_{\mathbb{R}^n} f\frac{\partial(x_1,\dots,x_n)}{\partial(y_1,\dots,y_n)}\,dy_1\dots dy_n = \int_{\mathbb{R}^n} g\,dy_1\dots dy_n,$$

что и требовалось. □

Доказанное предложение показывает, что следующее определение корректно.

Определение 31.17. Пусть $\omega \in \Omega^n(X)$ — дифференциальная форма, где X — ориентированное n-мерное многообразие с краем. Предположим, что $\operatorname{supp}\omega$ компактен и содержится в $\varphi(U)$, где $\varphi\colon U \to X$ — сохраняющая ориентацию локальная карта. Тогда *интегралом формы ω по многообразию X* называется число $\int_{\mathbb{R}^n} f dx_1 \dots dx_n$, где $\varphi^*\omega = f dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$. Обозначение: $\int_X \omega$.

Предложение-определение 31.18. Пусть ω — дифференциальная форма степени n с компактным носителем на n-мерном многообразии с краем X. Тогда *интегралом от формы ω по многообразию X* называется число $\sum \int_X f_i\omega$, где $\{f_i\}$ — гладкое разбиение единицы, подчиненное покрытию X координатными окрестностями, а интегралы понимаются в смысле определения 31.17. От выбора разбиения единицы это число не зависит; обозначается оно $\int_X \omega$.

Доказательство полностью аналогично доказательству корректности определения интеграла от плотности в лекции 28.

Наконец, последнее определение:

Определение 31.19. Пусть X — многообразие (возможно, с краем), $Y \subset X$ — ориентированное подмногообразие размерности k, и $\omega \in \Omega^k(X)$. Тогда полагаем по определению $\int_Y \omega = \int_Y i^*\omega$, где $i\colon Y \to X$ — включение.

Теперь наконец можно сформулировать теорему Стокса.

Теорема 31.20 (Теорема Стокса: второй вариант). *Пусть X — n-мерное ориентированное многообразие с краем и $\omega \in \Omega^{n-1}(X)$ — дифференциальная форма с компактным носителем. Тогда*

$$\int_{\partial X} \omega = \int_X d\omega,$$

где ориентация на ∂X индуцирована ориентацией на X в смысле определения 31.15.

Доказательство. Можно, очевидно, ограничиться случаем, когда $\operatorname{supp}\omega \subset \varphi(U)$, где $U \subset H^n$ открыто и φ — сохраняющая ориентацию локальная карта. Положим $\varphi^*\omega = f dx_1 \wedge \ldots \widehat{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_n$ и разберем два случая.

1. U не пересекается с границей H^n. В этом случае $\int_{\partial X} \omega = 0$, но и $\int_X d\omega = \pm \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_1 \ldots dx_n = 0$ (сведите интеграл к повторному, начав с интегрирования по dx_i, и примените формулу Ньютона-Лейбница).

2. U имеет непустое пересечение с границей H^n. Если $i \neq 1$, то левая часть формулы равна нулю, так как $\omega|_{\partial X} = 0$, а правая часть равна нулю по той же причине, что и в первом случае (повторное интегрирование можно начать с интегрирования по $\mathbb{R}$ производной по x_i от гладкой функции с компактным носителем). Если, наконец, $i = 1$, то правая часть равна $\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 \ldots dx_n$, а левая часть равна $-\int_{R^{n-1}} f(0, x_2, \ldots, x_n)\, dx_2 \ldots dx_n$ (знак «минус» возник, так как базис $\frac{\partial}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}$ в касательном пространстве к ∂H^n отрицательно ориентирован в соответствии с нашим определением индуцированной ориентации). Теперь совпадение левой и правой частей немедленно получается с помощью повторного интегрирования, начинающегося с интегрирования по dx_1 (применить все ту же формулу Ньютона-Лейбница). $\square$

Следствие 31.21. *Если ω — дифференциальная форма степени $n-1$ (с компактным носителем) на ориентированном n-мерном многообразии X без края, то $\int_X d\omega = 0$.*