Лекция 32. Два слова о когомологиях де Рама

Хотя ряд понятий топологии $\langle\ldots\rangle$ и вводится без особого труда, попытки их серьезно использовать в простейших примерах неизбежно требуют развития некоторого аппарата, не представленного никакими аналогиями в классической математике.
Б. А. Дубровин, С. П. Новиков, А. Т. Фоменко. Современная геометрия. М.: Наука, 1979.

Начнем с невинного определения.

Определение 32.1. Пусть ω — дифференциальная форма на многообразии. Говорят, что ω *замкнута*, если $d\omega = 0$, и *точна*, если существует такая форма η, что $\omega = d\eta$.

Из предложения 29.15 следует, что всякая замкнутая форма является точной. Стало быть, имеет смысл следующее определение:

Определение 32.2. Пусть X — гладкое многообразие. *k-ой группой когомологий Де Рама* многообразия X называется фактор пространства замкнутых k-форм по пространству точных k-форм[9]. Обозначение: $H^i_{\mathrm{DR}}(X)$.

Обратный образ замкнутой формы при гладком отображении будет замкнут (если $d\omega = 0$, то $d(f^*\omega) = f^*d\omega = 0$), а обратный образ точной формы будет точен. Поэтому всякое гладкое отображение $f\colon X \to Y$ индуцирует гомоморфизм групп (векторных пространств) когомологий Де Рама $f^*\colon H^i_{\mathrm{DR}}(Y) \to H^i_{\mathrm{DR}}(X)$, направленный «против течения» (для простоты этот гомоморфизм обозначается так же, как обратный образ дифференциальной формы). Ясно, что $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$ (то же соотношение, что для обратных образов форм).

Познакомимся с когомологиями Де Рама поближе. По самому́ определению, $H^k_{\mathrm{DR}}(X) = 0$, если k отрицательно или больше $\dim X$. Найдем $H^0_{\mathrm{DR}}(X)$. Точных форм степени нуль вообще нет (так как нет форм степени -1), а замкнутые формы степени нуль — это функции с нулевым дифференциалом. Поскольку в локальных координатах у такой функции все частные производные равны нулю, получаем, что пространство замкнутых 0-форм на X (оно же $H^0_{\mathrm{DR}}(X)$) есть пространство функций, постоянных на компонентах связности многообразия X. В частности, если X связно, то $H^0_{\mathrm{DR}}(X) = \mathbb{R}$.

Попробуем посчитать что-нибудь еще.

[9]Разумеется, это не просто группа, а векторное пространство над $\mathbb{R}$, но так уж говорят.

Предложение 32.3. *Если $X = \mathbb{R}$, то $H^0_{\mathrm{DR}}(X) = \mathbb{R}$, $H^1_{\mathrm{DR}}(X) = 0$.*

Доказательство. Только утверждение про H^1_{DR} нуждается в доказательстве. По соображениям размерности всякая 1-форма на прямой замкнута; с другой стороны, всякая 1-форма на прямой будет и точна: если $\omega = f(x)dx$, то $\omega = dF$, где F — любая первообразная функции f. $\square$

Предложение 32.3 выполняется в любой размерности:

Предложение 32.4. $H^0_{\mathrm{DR}}(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}$, $H^i_{\mathrm{DR}}(\mathbb{R}^n) = 0$ *при* $i > 0$.

Доказательство. Всякая $\omega \in \Omega^r(\mathbb{R}^n)$ единственным образом записывается в виде

$$\omega = \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_r \leqslant n} f_{i_1,\ldots,i_r} dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_r}.$$

Для $0 \leqslant r \leqslant n$ обозначим через Ω^r_k пространство r-форм, в записи которых не участвуют dx_j при $j > k$ (в частности, $\Omega^r_0 = \{0\}$, а $\Omega^r_n = \Omega^r(\mathbb{R}^n)$). Докажем индукцией по k следующее утверждение:

> *если $r > 0$ и форма $\omega \in \Omega^r_k$ замкнута, то $\omega = d\eta$ для некоторой $\eta \in \Omega^r(\mathbb{R}^n)$.*

При $k = 0$ доказывать нечего. Пусть для k наше утверждение доказано, и пусть $\omega \in \Omega^r_{k+1}$ — замкнутая форма; имеем $\omega = \omega_1 + dx_{k+1} \wedge \omega_2$, где в записи форм $\omega_1 \in \Omega^r_k$ и $\omega_2 \in \Omega^{r-1}_{k+1}$. Так как $d\omega = 0$, имеем

$$d\omega_1 = dx_{k+1} \wedge d\omega_2. \tag{32.1}$$

Поскольку $\omega_1 \in \Omega^r_k$, в левой части (32.1) отсутствуют слагаемые, содержащие и dx_{k+1}, и dx_j при $j > k+1$; так как в правой части все слагаемые содержат dx_{k+1}, слагаемых в левой части, содержащих dx_j при $j > k+1$, нет. Стало быть, слагаемых, содержащих dx_j при $j > k+1$, нет и в правой части, так что, если

$$\omega_2 = \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_{r-1} \leqslant k} f_{i_1,\ldots,i_{r-1}} dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_{r-1}},$$

то $\partial f_{i_1,\ldots,i_{r-1}}/\partial x_j = 0$ при $j > k+1$. Теперь для $1 \leqslant i_1 < \ldots < i_{r-1} \leqslant k$ положим

$$F_{i_1,\ldots,i_{r-1}}(x_1,\ldots,x_n) = \int_0^{x_k} f(x_1,\ldots,x_k,t,x_{k+2},\ldots,x_n)dt.$$

Ясно, что $\partial F_{i_1,\ldots,i_{r-1}}/\partial x_{k+1} = f_{i_1,\ldots,i_{r-1}}$ и что $F_{i_1,\ldots,i_{r-1}}$ не зависит от x_j при $j > k+1$. Положим теперь

$$\eta = \sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_{r-1}\leqslant k} F_{i_1,\ldots,i_{r-1}}\,dx_{i_1}\wedge\ldots\wedge dx_{i_{r-1}}.$$

Тогда $d\eta = dx_{k+1}\wedge\omega_2+\omega'$, где $\omega'\in\Omega^r_k$. Стало быть, $\omega - d\eta\in\Omega^r_k$; поскольку, очевидно, $d(\omega-d\eta)=0$, имеем по предположению индукции $\omega - d\eta = d\eta'$ для некоторой $\eta'\in\Omega^{r-1}(\mathbb{R}^n)$, откуда $\omega = d(\eta+\eta')$, и утверждение доказано.

При $k=n$ доказанное утверждение совпадает с предложением 32.1. $\square$

Поскольку открытый шар в $\mathbb{R}^n$ диффеоморфен $\mathbb{R}^n$, а каждая точка на n-мерном гладком многообразии (без края) обладает окрестностью, диффеоморфной шару в $\mathbb{R}^n$, из предложения 32.4 вытекает такое предложение:

Предложение 32.5 (лемма Пуанкаре). *Пусть ω — дифференциальная форма положительной степени на многообразии X. Если ω замкнута, то для всякой точки $x\in X$ найдутся такие окрестность $U\ni X$ и дифференциальная форма η на U, что $\omega|_U = d\eta$.*

Иными словами, всякая замкнутая форма локально точна. Тем самым когомологии Де Рама, измеряющие, насколько замкнутые формы отличаются от точных, несут в себе информацию о том, каким образом многообразие склеено из простейших кусков — окрестностей, диффеоморфных шарам.

К сожалению, для того, чтобы дать достаточное количество примеров вычисления когомологий, у нас не хватит техники. «Вручную» можно сделать лишь совсем немного.

Предложение 32.6. *Если X — компактное ориентируемое многообразие (без края) размерности n, то $H^n_{\mathrm{DR}}(X,\mathbb{R})\neq 0$.*

Доказательство. Зафиксируем какую-нибудь ориентацию многообразия X. Согласно предложению 31.7, существует такая дифференциальная форма $\omega\in\Omega^n(X)$, что $\omega_x(v_1,\ldots,\omega_n)>0$ для всякой точки $x\in X$ и для всякого положительно ориентированного базиса $(v_1,\ldots,v_n)$ в $\mathcal{T}_xX$. Стало быть, в любых сохраняющих ориентацию локальных координатах форма ω записывается в виде $f(x_1,\ldots,x_n)dx_1\wedge\cdots\wedge x_n$, где функция f всюду положительна, так что из определения интеграла формы по ориентированному многообразию ясно, что $\int_X \omega$ является суммой положительных чисел; в частности, $\int_X \omega \neq 0$. Следствие из теоремы Стокса (следствие 31.21) показывает, что форма ω не является точной; с другой стороны, она замкнута по соображениям размерности. Следовательно, ω представляет ненулевой n-мерный класс когомологий. $\square$

На самом деле верно более точное утверждение, которое мы уже не докажем:

Предложение 32.7. *Пусть X — компактное n-мерное многообразие. Если X ориентируемо, то $H^n_{\mathrm{DR}}(X) = \mathbb{R}$, а если X неориентируемо, то $H^n_{\mathrm{DR}}(X) = 0$.*

Скажем еще кое-что о связи когомологий Де Рама с сингулярными цепями. Пусть ω — дифференциальная форма степени k на многообразии X. Тогда ее можно рассматривать как функцию на множестве всех k-мерных (гладких) сингулярных симплексов, действующую по правилу $\sigma \mapsto \int_\sigma \omega$. Ясно, что при этом какая попало функция получиться не может: интеграл данной формы по симплексу должен «непрерывно» зависеть от симплекса (при любом разумном определении понятия непрерывности). Отбросим теперь всякие ограничения на зависимость «интеграла» от симплекса:

Определение 32.8. Пусть X — k-мерное многообразие. *k-мерной коцепью на многообразии X с коэффициентами в $\mathbb{R}$* называется отображение c из множества k-мерных сингулярных симплексов в $\mathbb{R}$. Множество k-мерных коцепей обозначается $C^k(X)$; оно является векторным пространством над $\mathbb{R}$ (если c_1 и c_2 — коцепи, то $(c_1 + c_2)(\sigma) = c_1(\sigma) + c_2(\sigma)$; аналогично с умножением на число).

Коцепь, ставящую в соответствие симплексу σ число $\int_\omega \sigma$, где ω — фиксированная k-форма, будем обозначать c_ω.

Итак, коцепи — это обобщение дифференциальных форм; следующая конструкция является обобщением внешнего дифференциала.

Определение 32.9. Пусть $c \in C^k(X)$. *Кограницей* коцепи c называется $(k+1)$-мерная коцепь dc, действующая по правилу

$$(dc)(\sigma) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i c(\partial_i \sigma).$$

При соответствии $\omega \mapsto c_\omega$ внешний дифференциал переходит в кограницу:

Предложение 32.10. *Пусть* $\omega \in \Omega^k(X)$. *Тогда* $d(c_\omega) = c_{d\omega}$ *(в левой части* d *означает кограницу, в правой — внешний дифференциал).*

Доказательство. Это переформулировка первого варианта теоремы Стокса (теорема 30.15). $\square$

Можно рассматривать коцепи как функции на сингулярных цепях, если для коцепи c положить $c(\sum n_i\sigma_i) = \sum n_i c(\sigma_i)$. В таких обозначениях определение кограницы записать совсем просто: $(dc)(\sigma) = c(\partial\sigma)$.

Предложение 32.11. *Пусть* c *— сингулярная коцепь. Тогда* $d(dc) = 0$.

Доказательство. Это прямое следствие предложения 30.14: $ddc(\sigma) = (dc)(\partial\sigma) = c(\partial\partial\sigma) = 0$. $\square$

Следующее определение полностью параллельно определению 32.2.

Определение 32.12. Пусть X — гладкое многообразие. k-мерная коцепь c, для которой $dc = 0$, называется *k-мерным коциклом.* k-мерная коцепь c, являющаяся кограницей $k-1$-мерной коцепи, называется *k-мерной кограницей. k-ой группой (сингулярных) когомологий многообразия* X *с коэффициентами в* $\mathbb{R}$ называется фактор пространства k-коциклов по подпространству k-кограниц (предложение 32.11 показывает, что всякая кограница является коциклом). Обозначение: $H^k(X, \mathbb{R})$.

(В стандартном определении сингулярных когомологий коцепи, как известно, определяются ка функции на множестве всех — а не только гладких — сингулярных симплексов; эквивалентность нашего определения стандартному проверяется с помощью так называемого «метода ацикличных носителей».)

Предложение 32.10 показывает, что при отображении $\omega \mapsto c_\omega$ замкнутые формы переходят в коциклы, а точные формы — в кограницы. Следовательно, отображение $\omega \mapsto c_\omega$ индуцирует естественный гомоморфизм $H^k_{\mathrm{DR}}(X) \to H^k(X, \mathbb{R})$.

Теорема 32.13 (теорема Де Рама). *Гомоморфизм* $H^k_{\mathrm{DR}}(X) \to H^k(X, \mathbb{R})$, *индуцированный отображением* $\omega \mapsto c_\omega$, *является изоморфизмом.*

Доказать теорему Де Рама мы в этом курсе не сможем — для этого требуется либо довольно серьезная гомологическая алгебра, либо довольно серьезный анализ.