Лекция 33. Теорема Фробениуса

Задача, которую мы будем изучать, является прямым обобщением задачи об интегрировании поля прямых.

В этой лекции слово «многообразие» означает «многообразие без края».

Определение 33.1. *Полем k-мерных плоскостей*, или *k-мерным распределением* на гладком многообразии X называется семейство k-мерных векторных подпространств $V_x \subset \mathcal{T}_x$ для всякого $x \in X$, гладко зависящих от точки x.

Определение 33.2. Говорят, что k-мерное распределение $\{V_x\}$ на многообразии X является *интегрируемым*, если для всякой точки $x \in X$ найдется окрестность $U \in x$ и замкнутое k-мерное подмногообразие $Y \subset U$, обладающее тем свойством, что для всякой точки $y \in Y$ выполнено равенство $\mathcal{T}_y Y = V_y \subset \mathcal{T}_y X$.

k-мерные подмногообразия, о которых идет речь в этом определении, называются *интегральными многообразиями* распределения $\{V_x\}$.

Если $k = 1$, то всякое одномерное распределение (оно же поле прямых) интегрируемо. В самом деле, обозначим размерность многообразия X через $n + 1$ (чтобы формулы получились более привычными); ввиду локальности задачи можно считать, что X — открытое подмножество в $\mathbb{R}^{n+1}$. Обозначим координаты в $\mathbb{R}^{n+1}$ через $(t, x_1, \ldots, x_n)$ и выберем систему координат таким образом, чтобы ни одна из прямых V_y для y, близких к x, не была «вертикальна» — параллельна оси t. Тогда прямую, проходящую через точку $x = (t_0, x_1, \ldots, x_n)$, можно задать параметрическими уравнениями

$$t \mapsto (t_0 + t, x_1 + v_1(t, x_1, \ldots, x_n)t, \ldots, x_n + v_n(t, x_1, \ldots, x_n)t),$$

и при этом интегральные многообразия — просто интегральные кривые дифференциального уравнения $x' = v(t, x)$, где $v = (v_1, \ldots, v_n)$.

При $k > 1$, напротив, существуют неинтегрируемые распределения, причем неинтегрируемость возникает не из-за недостаточной гладкости, а по более фундаментальным — «общегеометрическим» причинам. Вот простейший и типичный пример.

Рассмотрим форму $\omega = dz - x\,dy$ в $\mathbb{R}^3$. На каждом касательном пространстве она определяет ненулевой линейный функционал, так что ядра этих функционалов определяют поле 2-плоскостей в $\mathbb{R}^3$. Предположим, что это поле интегрируемо. На каждой вертикальной плоскости

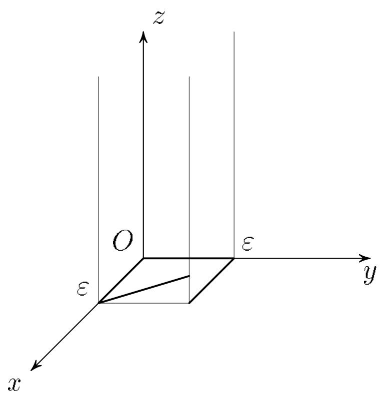

Рис. 33.6. Пример неинтегрируемости

в $\mathbb{R}^3$ наше поле плоскостей высекает поле прямых; стало быть, пересечения интегральных подмногообразий с этими плоскостями должны быть интегральными кривыми этих полей. Ограничение формы ω на плоскости, задаваемые уравнениями $y = \mathrm{const}$ или $x = 0$, имеет вид dz, так что на них интегральные многообразия должны высекать горизонтальные прямые; ограничение на плоскость, заданную уравнением $x = \varepsilon$, имеет вид $dz - \varepsilon dy$, так что на на ней должны высекаться прямые, наклоненные под углом $\operatorname{arctg}\varepsilon$ к горизонтальной плоскости. Стало быть (см. рис. 33.6), интегральное многообразие, проходящее через начало координат, должно пересекаться с вертикальной прямой, проходящей через точку $(\varepsilon, \varepsilon, 0)$, в двух различных точках, что при малых ε невозможно, поскольку в начале координат касательная плоскость к этому интегральному многообразию горизонтальна.

Теорема Фробениуса, которой посвящена эта лекция, дает необходимое и достаточное условие интегрируемости k-мерного распределения.

Заметим для начала, что, как легко видеть, коммутатор двух векторных полей, касающихся подмногообразия $Y \subset X$, также касается подмногообразия Y. Тем самым очевидна часть «только тогда» в следующей теореме.

Теорема 33.3 (теорема Фробениуса). *k-мерное распределение интегрируемо тогда и только тогда, когда для любых двух векторных полей v и w, касающихся распределения, их коммутатор также касается распределения. (Говорят, что векторное поле v касается распределения $\{V_x\}$, если для всякого $x \in X$ имеем $v_x \in V_x$.)*

Доказательство. Будем говорить, что k-мерное распределение на n-

мерном многообразии задано векторными полями $v_1, \ldots, v_k$, если для каждой точки $x \in X$ касательные векторы $(v_1)_x, \ldots, (v_k)_x$ образуют базис векторного пространства $V_x \subset \mathcal{T}_x X$.

(Важное предупреждение: далеко не всякое k-мерное распределение можно задать с помощью k определенных на всем многообразии линейно независимых векторных полей!)

Лемма 33.4. *Пусть k-мерное распределение на n-мерном многообразии задано векторными полями $v_1, \ldots, v_k$, для которых $[v_i, v_j] = 0$ при всех i и j. Тогда это распределение интегрируемо.*

Доказательство леммы. Поскольку задача локальна, можно считать, что X — открытое подмножество в $\mathbb{R}^n$. Пусть $x \in X$; обозначим через $g_t^1, \ldots, g_k^t$ локальные фазовые потоки (в точке x), соответствующие векторным полям $v_1, \ldots, v_k$ соответственно. Пусть V — достаточно малая окрестность нуля в $\mathbb{R}^k$; рассмотрим отображение $\Phi\colon V \to U$, заданное формулой

$$(t_1, \ldots, t_k) \mapsto g_t^1 \circ \ldots \circ g_k^t(x). \tag{33.1}$$

Ясно, что Φ гладко. Покажем, что существует содержащая x окрестность $V' \subset V$, для которой $\Phi(V')$ — интегральное подмногообразие. В самом деле, пусть $t = (t_1, \ldots, t_k) \in V$ и $\Phi(t) = y \in U$. Тогда из определения фазового потока явствует, что $\Phi'(t)(\partial/\partial t_k) = v_k(y)$. Поскольку, однако, поля v_j попарно коммутируют, предложение 27.9 показывает, что коммутируют и соответствующие фазовые потоки. Уменьшим окрестность V таким образом, чтобы для всякого $t \in V$ были определены композиции $g_t^{i_1} \circ \ldots \circ g_{i_k}^t(x)$ для всех возможных перестановок индексов $i_1, \ldots, i_k$. Тогда имеем равенство $\Phi'(t)(\partial/\partial t_j) = v_j(y)$ для всякого j (поскольку в (33.1) можно переставить преобразования так, чтобы g^j применялось последним). Тем самым для всякого $t \in V$ имеем $\Phi'(t)(\mathcal{T}_t V) = V_{\Phi(t)}$; в частности, Φ является иммерсией; уменьшая еще V, получим, что Φ — вложение, образ которого — интегральное многообразие, проходящее через x. $\square$

Теперь завершим доказательство теоремы Фробениуса. По-прежнему можно считать, что X — открытое подмножество в $\mathbb{R}^n$; построим интегральное многообразие, проходящее через точку $x \in X$. Для этого выберем в $\mathbb{R}^n$ систему координат $x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_{n-k}$ таким образом, чтобы при проекции π на первые k координат пространство V_x изоморфно отображалось на $\mathbb{R}^k$; уменьшая при необходимости открытое множество X, можно считать, что изоморфизмом является и всякая проекция $\mathrm{pr}_p = \pi'(p)|_{V_p} \to \mathbb{R}^k$ для $p \in X$. Рассмотрим векторные поля $\partial/\partial x_1, \ldots, \partial/\partial x_k$ на $\mathbb{R}^k$; в силу сказанного выше они однозначно поднимаются до векторных полей $v_1, \ldots, v_k$ на X, касающихся распределения (подробнее: $v_j(p) \in V_p$ и $\pi'(p)(v_j(p)) = \partial/\partial x_j$ для всякого $p \in X$ при $1 \leqslant j \leqslant k$). В координатах имеем

$$v_j = \frac{\partial}{\partial x_j} + \sum \varphi_{jm} \frac{\partial}{\partial y_m}. \tag{33.2}$$

Нетрудно видеть, что коммутатор любых двух полей v_i и v_j является линейной комбинацией $\partial/\partial y_m$ при $1 \leqslant m \leqslant n-k$. По условию, эти коммутаторы должны касаться распределения, но при нашем выборе координат линейная комбинация касательных векторов $\partial/\partial y_m$ может лежать в каком-то V_p только если эта линейная комбинация равна нулю. Стало быть, поля $v_1, \ldots, v_k$ попарно коммутируют, и искомая интегрируемость вытекает из леммы. $\square$

Распределение можно задавать не только с помощью множества касающихся его векторных полей, но и другими способами; соответственно, и теорема Фробениуса будет при этом формулироваться иначе. Приведем две такие переформулировки.

Во-первых, можно задать распределение не с помощью векторных полей, а двойственным образом — с помощью дифференциальных форм. Ограничимся для простоты случаем распределений коразмерности 1. Итак, пусть на n-мерном многообразии X задана дифференциальная форма $\omega \in \Omega^1(X)$, нигде не обращающаяся в нуль. Тогда соответствие $x \mapsto \mathrm{Ker}(\omega)_x$ задает распределение коразмерности 1 на многообразии X (всякое распределение коразмерности 1 допускает такое задание локально, но не обязательно глобально! Ср. предупреждение выше).

Предложение 33.5. *Пусть на n-мерном многообразии X задана 1-форма ω, нигде не обращающаяся в нуль. Тогда $n-1$-мерное распределение $\{V_x\}$, задаваемое этой формой, будет интегрируемо тогда и только тогда, когда $d\omega \wedge \omega = 0$.*

Доказательство. Пусть v и w — векторные поля, касающиеся распределения $\{V_x\}$. По определению это означает, что $\omega(v) = \omega(w) = 0$. Легко видеть, что для всяких 1-формы ω и векторных полей v и w выполнено следующее равенство:

$$(d\omega)(v, w) = v(\omega(w)) - w(\omega(v)) - \omega([v, w]) \tag{33.3}$$

(это частный случай так называемой формулы Картана, с помощью которой в таких терминах записывается дифференциал формы произвольной степени). Если v и w касаются распределения, заданного формой ω, то из (33.3) вытекает, что $\omega_i([v,w]) = -(d\omega_i)(v,w)$. Поэтому предложение сразу следует из такой чисто алгебраической леммы:

Лемма 33.6. *Пусть ω и λ — линейный функционал и кососимметрическая 2-форма на конечномерном векторном пространстве E. Тогда ограничение λ на $\operatorname{Ker}\omega$ равно нулю в том и только том случае, когда $\lambda\wedge\omega = 0$.*

Для доказательства леммы заметим, что

$$(\omega\wedge\lambda)(e_1,e_2,e_3) = \omega(e_1)\lambda(e_2,e_3) + \omega(e_2)\lambda(e_3,e_1) + \omega(e_3)\lambda(e_1,e_2)$$

для всяких $e_1, e_2, e_3 \in E$, и выберем базис $e_1,\dots,e_n$ в E таким образом, чтобы $e_2,\dots,e_n$ порождали $\operatorname{Ker}\omega$. Тогда $(\omega\wedge\lambda)(e_i,e_j,e_k) = 0$, если никто из i,j,k не равен 1, и $(\omega\wedge\lambda)(e_1,e_j,e_k) = \omega(e_1)\lambda(e_j,e_k)$, причем $\omega(e_1)\neq 0$. Отсюда лемма, а тем самым и предложение, следует с очевидностью. $\square$

Наша вторая переформулировка теоремы Фробениуса есть не что иное, как запись ее утверждения в координатах. Именно, пусть $U \subset \mathbb{R}^n$ — открытое множество, на котором задано k-мерное распределение $\{V_p\}$. Уменьшив, если нужно, множество U, можно считать, что все k-мерные подпространства V_x изоморфно проектируются на подпространство, порожденное первыми k координатными векторами. Представим $\mathbb{R}^n$ в виде произведения $\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^m$ и будем обозначать координаты в $\mathbb{R}^n$ через $(x_1,\dots,x_k,y_1,\dots,y_{n-k})$. Тогда k-мерное пространство V_p, где $p=(x,y)$, можно рассмотреть как график линейного отображения из $\mathbb{R}^k$ в $\mathbb{R}^{n-k}$ с матрицей f_{ij}, где f_{ij} — функции от $x_1,\dots,x_k$ и $y_1,\dots,y_{m-k}$. Соответственно, интегральное подмногообразие в $\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^{n-k}$, отвечающее этому распределению, будет (если оно существует, разумеется) графиком функции из (открытого подмножества в) $\mathbb{R}^k$ в $\mathbb{R}^{n-k}$. Если записать эту функцию в виде

$$(x_1,\dots,x_k)\mapsto (y_1(x_1,\dots,x_k),\dots,y_{n-k}(x_1,\dots,x_k)),$$

то условие того, что ее график касается распределения, запишется в виде

$$\frac{\partial y_i}{\partial x_j} = \varphi_{ij}(x_1,\dots,x_k,y_1,\dots,y_{n-k}). \tag{33.4}$$

Ясно, что если $(x_1,\dots,x_m)$ — решение системы (33.4), то как минимум должно выполняться условие симметрии частных производных:

$\frac{\partial}{\partial t_j}(\partial x_i/\partial t_l) = \frac{\partial}{\partial t_l}(\partial x_i/\partial t_j)$. Беря выражения для $(\partial x_i/\partial t_l)$ и $(\partial x_i/\partial t_j)$ из правой части системы (33.4) и пользуясь правилом дифференцирования сложной функции, получаем следующее условие:

$$\frac{\partial f_{il}}{\partial t_j} + \sum_{\nu=1}^{m} \frac{\partial f_{ij}}{\partial x_\nu} f_{\nu j} = \frac{\partial f_{ij}}{\partial t_l} + \sum_{\nu=1}^{m} \frac{\partial f_{il}}{\partial x_\nu} f_{\nu l} \tag{33.5}$$

(для всех $i \in [1; m]$ и для всех $j, l \in [1; k]$).

Оказывается, что эти необходимые условия являются и достаточными:

Предложение 33.7 (теорема Фробениуса в координатах). *Пусть на открытом подмножестве $U \subset \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m$ задана система уравнений* (33.4) *(с гладкими правыми частями). Тогда следующие два условия равносильны:*

(1) Для всякой пары $(t_1, \dots, t_k, x_1, \dots, x_m) \in U$ существует определенное в окрестности точки $(t_1, \dots, t_k)$ решение системы (33.4) *с начальными условиями $x_i(t_1, \dots, t_k) = x_i$.*

(2) Всюду на U выполнены соотношения (33.5).

Доказательство. Нетрудно видеть, что распределение, интегральные многообразия которого являются графиками решений системы (33.4), порождается векторными полями

$$\begin{aligned}
v_1 &= \frac{\partial}{\partial x_1} + \varphi_{11}\frac{\partial}{\partial y_1} + \dots + \varphi_{m1}\frac{\partial}{\partial y_m};\\
v_2 &= \frac{\partial}{\partial x_2} + \varphi_{12}\frac{\partial}{\partial y_1} + \dots + \varphi_{m2}\frac{\partial}{\partial y_m};\\
&\dots\\
v_k &= \frac{\partial}{\partial x_k} + \varphi_{1k}\frac{\partial}{\partial y_1} + \dots + \varphi_{mk}\frac{\partial}{\partial y_m};
\end{aligned}$$

иными словами, мы снова получили набор векторных полей вида (33.2). Как мы видели, при доказательстве теоремы Фробениуса, условие интегрируемости для распределения, порожденного этими векторными полями, выполнено тогда и только тогда, когда они попарно коммутируют. Если вычислить «в лоб» эти коммутаторы, то окажется, что условие их равенства нулю идентично условиям (33.5). Предоставляем читателю проделать выкладки самостоятельно. $\square$