Лекция 34. Пространства L^1 и L^2

Вернемся к локальной теории.

Пусть (X, μ) — пространство с мерой. Суммируемые функции на X образуют векторное пространство, а функции, равные нулю почти всюду, образуют в нем векторное подпространство.

Определение 34.1. Через $L^1(X, \mu)$ (если нет опасности путаницы, то $L^1(X)$ или просто L^1) обозначается фактор пространства суммируемых функций по подпространству функций, равных нулю почти всюду.

Если $f \in L^1$, то полагаем $\|f\|_1 = \int_X |f(x)| d\mu(x)$.

Мы не уточняли в этом определении, принимают функции вещественные или комплексные значения. В первом случае, естественно, L^1 будет векторным пространством над $\mathbb{R}$, во втором — над $\mathbb{C}$. Допуская вольность речи, мы не будем различать элементы L^1 и представляемые ими функции. К путанице это обычно не приводит.

Наряду с пространством суммируемых функций важную роль играет пространство функций, «суммируемых с квадратом». Вот определение.

Определение 34.2. Измеримая функция $f\colon X \to \mathbb{C}$, где (X, μ) — пространство с мерой, называется суммируемой с квадратом, если $\int_X |f^2| d\mu < \infty$.

Если $f \in L^2$, то полагаем $\|f\|_2 = \left(\int_X |f(x)|^2 d\mu(x)\right)^{1/2}$.

Предложение 34.3. *Суммируемые с квадратом функции образуют векторное пространство. Если f и g суммируемы с квадратом, то функция fg суммируема.*

Доказательство. Для доказательства первого утверждения достаточно проверить, что множество суммируемых с квадратом функций замкнуто относительно сложения, но это вытекает из очевидного неравенства $|a+b|^2 \leqslant 2(|a|^2+|b|^2)$. Второе утверждение вытекает из не менее очевидного неравенства $|ab| \leqslant (|a|^2 + |b|^2)/2$. $\square$

Обозначение 34.4. Через $L^2(X, \mu)$ обозначается фактор пространства суммируемых с квадратом (комплекснозначных) функций по подпространству функций, равных нулю почти всюду.

Если $f, g \in L^2$, то полагаем $(f, g) = \int_X f(x)\overline{g(x)} d\mu(x)$ и $\|f\|_2 = \sqrt{(f, f)}$.

Имеется также вариант этого определения для функций со значениями в $\mathbb{R}$, а не $\mathbb{C}$. Единственное отличие — отсутствие комплексного сопряжения в определении (f, g)

Нормы $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ вводят на L^1 и L^2 структуру нормированного векторного пространства (см. определение 17.1).

В самом деле, для L^1 очевидна выполнимость всех условий из определения нормы, кроме того, что из $\|v\| = 0$ следует $v = 0$. Это последнее сразу вытекает из такой леммы.

Лемма 34.5. *Если $f\colon X \to [0; +\infty)$ — измеримая функция и $\int_X f d\mu = 0$, то $f(x) = 0$ для почти всех $x \in X$.*

Доказательство. Положим $E_n = f^{-1}([1/n; +\infty))$. Если $\mu(E_n) > 0$ для какого-то $n \in N$, то $\int_X f d\mu \geqslant \mu(E_n)/n > 0$. Если же все E_n имеют меру нуль, то нулевую меру имеет и $f^{-1}(0; +\infty) = \bigcup_n E_n$. □

(Именно ради того, чтобы нормы ненулевых элементов были ненулевыми, и вводится факторизация в определении L^1 и L^2.)

Что касается L^2, то из предложения 34.3 явствует, что $(\cdot, \cdot)$ задает на L^2 неотрицательно определенную эрмитову форму, откуда немедленно следуют все утверждения, кроме импликации $\|f\|_2 = 0 \Rightarrow f = 0$; эта последняя также вытекает из леммы 34.5.

Следствие 34.6 (неравенство Коши–Буняковского). *Если $f, g \in L^2$, то $|(f, g)| \leqslant \|f\|_2 \cdot \|g\|_2$.*

На всяком нормированном пространстве имеется естественная метрика, задаваемая по правилу $\rho(v, w) = \|v - w\|$ и, тем самым, естественная топология, задаваемая этой метрикой. В дальнейшем, говоря о нормированном пространстве, мы будем подразумевать, что на нем задана эта метрика и эта топология.

Предложение 34.7. *Пусть V, W — нормированные векторные пространства. Линейное отображение $A\colon V \to W$ непрерывно (относительно топологий, задаваемых нормами в V и W) тогда и только тогда, когда существует такая константа $M > 0$, что $\|A(v)\| \leqslant M\|v\|$ для всех $v \in V$.*

Доказательство. Если $\|A(v)\| \leqslant M\|v\|$ для всех v, то $\|A(v) - A(w)\| < \varepsilon$, как только $\|v - w\| < \varepsilon/M$, откуда непрерывность очевидна.

Чтобы доказать обратное утверждение, заметим, что, коль скоро отображение A непрерывно, оно, в частности, непрерывно и в нуле;

стало быть, существует такое $\delta > 0$, что из неравенства $\|v\| \leqslant \delta$ следует неравенство $\|A(v)\| \leqslant 1$. Теперь для всякого $v \in V$ имеем

$$|A(v)| = |A(\delta^{-1}\|v\| \cdot \delta\|v\|^{-1}v)| = \delta^{-1}\|v\| \cdot |A(\delta\|v\|^{-1}v)| \leqslant \delta^{-1}\|v\|,$$

поскольку, очевидно, $\|\delta\|v\|^{-1}v\| = \delta$. □

Следствие 34.8 (из доказательства). *Линейное отображение нормированных пространств непрерывно тогда и только тогда, когда оно непрерывно в нуле.*

Теорема 34.9. *Пространства L^1 и L^2 полны как метрические пространства.*

Доказательство. Проведем доказательство для L^2 (для L^1 оно аналогично и проще).

Итак, пусть $\{f_n\}$ — фундаментальная последовательность функций, суммируемых с квадратом. Для доказательства ее сходимости достаточно доказать, что в ней найдется сходящаяся подпоследовательность. Далее, если $\{f_n\}$ — фундаментальная последовательность в произвольном метрическом пространстве, то у нее можно выбрать подпоследовательность $\{f_{n_k}\}$, обладающую тем свойством, что $\rho(f_{n_k}, f_{n_{k+1}}) \leqslant 1/2^k$ при всех k (так как в пополнении у этой последовательности есть некоторый предел f, достаточно выбрать n_k так, чтобы $\rho(f_{n_k}, f) \leqslant 1/2^{k+1}$). Итак, существует подпоследовательность, для которой $\|f_{n_k} - f_{n_{k+1}}\|_2 \leqslant 1/2^k$. Обозначим $f_{n_k} = g_k$; нам достаточно показать, что последовательность $\{g_k\}$ сходится в L^2.

По неравенству Коши–Буняковского имеем, для всякого натурального n,

$$\big\| \, |g_2 - g_1| + \ldots + |g_{n+1} - g_n| \, \big\|_2 \leqslant \|g_2 - g_1\|_2 + \ldots + \|g_{n+1} - g_n\|_2 \leqslant \sum_{k>0} \frac{1}{2^k} = 1;$$

следовательно,

$$\int_X (|g_2 - g_1| + \ldots + |g_{n+1} - g_n|)^2 d\mu \leqslant 1 \tag{34.1}$$

при всех $n > 0$. Положим

$$\varphi_n = (|g_2 - g_1| + \ldots + |g_{n+1} - g_n|)^2;$$

последовательность $\{\varphi_n\}$ является возрастающей, и ввиду (34.1) имеем $\lim_{n\to\infty} \int \varphi_n d\mu < \infty$, так что из теоремы Беппо Леви вытекает, что

$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) < \infty$ при почти все x. Стало быть, при почти всех $x \in X$ конечен и предел последовательности $\{\sqrt{\varphi_n(x)}\}$, а это значит, что при почти всех x сходится (абсолютно) ряд $\sum_n (g_{n+1}(x) - g_n(x))$ и тем самым последовательность $\{g_n(x)\}$; обозначим предел этой последовательности через $g(x)$ там, где он существует, и присвоим $g(x)$ произвольные значения для тех x, для которых предела нет. Мы утверждаем, что функция g суммируема с квадратом и что $g_n \to g$ в $L^2(X, \mu)$.

В самом деле, для любых целых положительных k и n имеем

$$\|g_k - g_{k+n}\|_2 \leqslant \|g_k - g_{k+1}\|_2 + \ldots + \|g_{k+n-1} - g_{k+n}\|_2 \leqslant \sum_{j \geqslant k} \frac{1}{2^j} = \frac{1}{2^{k-1}},$$

так что $\int_X |g_k - g_{k+n}|^2 d\mu \leqslant 1/4^{k-1}$. Устремляя в этом неравенстве n к бесконечности и применяя лемму Фату (предложение 15.19), получаем, что

$$\int_X |g_k - g|^2 d\mu \leqslant \frac{1}{4^{k-1}}. \tag{34.2}$$

В частности, функция $g_k - g$ суммируема с квадратом; поскольку g_k суммируема с квадратом по условию, функция g_k тоже суммируема с квадратом, так что $g \in L^2(X, \mu)$. Наконец, из (34.2) явствует, что $\|g_k - g\|_2 \leqslant 1/2^{k-1}$, откуда $g_k \to g$ в L^2. Теорема доказана. $\square$

Определение 34.10. Векторное пространство H, снабженное положительно определенной эрмитовой (в вещественном случае — симметрической) формой, называется *гильбертовым пространством*, если оно полно относительно метрики, задаваемой соответствующей нормой.

(Терминологическое предупреждение: некоторые авторы включают в определение условие, чтобы H содержало счетное плотное подмножество; мы так делать не будем.)

Как мы только что установили, примером гильбертова пространства является $L^2(X, \mu)$.

Гильбертовы пространства применяются в анализе очень широко. В нашем курсе мы ограничимся тем, что установим два важных общих факта о них.

Именно, пусть H — вещественное векторное пространство с положительно определенной евклидовой метрикой или комплексное векторное пространство с положительно определенной эрмитовой метрикой (про полноту пока ничего не предполагаем). Для определенности будем далее считать H вещественным: в комплексном случае доказательства

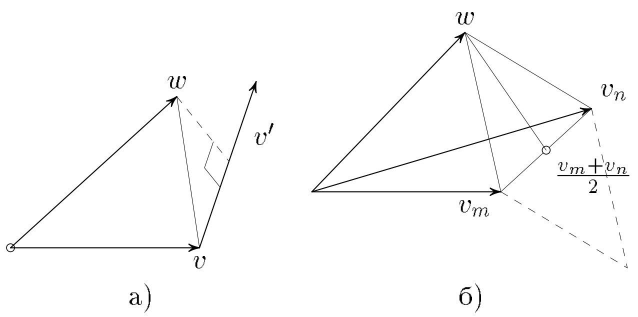

Рис. 34.7.

аналогичны. Если $V \subset H$ — векторное подпространство, то можно рассмотреть его *ортогональное дополнение*

$$V^\perp = \{w \in H \mid (v, w) = 0 \quad \text{для всех } v \in V\}.$$

Как известно (и тривиально проверяется), $V^\perp$ — векторное подпространство в H и $V \cap V^\perp = 0$.

Предложение 34.11. *Пусть V — замкнутое векторное подпространство в гильбертовом пространстве H. Тогда:*

(1) *$V^\perp$ замкнуто;*
(2) *$H = V \oplus V^\perp$;*
(3) *$(V^\perp)^\perp = V$.*

(Все это заведомо верно, если $\dim H < \infty$.)

Доказательство. Утверждение (1) очевидно; докажем (2). Нам достаточно показать, что каждый $w \in H$ представляется в виде $v + v_1$, где $v \in V$ и $v_1 \in V^\perp$.

Лемма 34.12. *Пусть вектор $v \in V$ таков, что $\|w - v\| \leqslant \|w - v'\|$ для всех $v' \in V$. Тогда $w - v \in V^\perp$.*

Доказательство леммы. Можно, разумеется, считать, что $w \notin V$. Пусть $(w - v, v') \neq 0$ для некоторого $v' \in V$. Заметим, что плоскость, порожденная векторами $w - v$ и v', есть обыкновенная евклидова плоскость; если $w - v$ и v' не перпендикулярны, то на прямой, содержащей v', найдется точка, лежащая ближе к концу вектора $w - v'$, чем конец вектора w (рис. 34а). Получаем противоречие. $\square$

Пусть теперь $c = \inf_{v' \in V} \|w - v'\|$; так как V замкнуто и $w \notin V$, имеем $c > 0$. Пусть $\{v_n\}$ — последовательность элементов из V, для которой $\lim_{n\to\infty} \|w - v_n\| = c$; покажем, что эта последовательность фундаментальна. В самом деле, для любых $m, n \in \mathbb{N}$ рассмотрим плоскость, порожденную векторами $w - v_m$ и $w - v_n$; согласно известному свойству параллелограмма («сумма квадратов диагоналей равна сумме квадратов всех сторон») имеем

$$\|v_m - v_n\|^2 = 2(\|w - v_m\|^2 + \|w - v_n\|^2) - 4\|w - (v_m + v_n)/2\|^2 \leqslant \\ \leqslant 2(\|w - v_m\|^2 + \|w - v_n\|^2) - 4c^2$$

(рис. 34б). Устремим m и n к бесконечности; тогда правая часть будет стремиться к нулю, откуда $\|v_m - v_n\| \to 0$, чем и установлена фундаментальность. Так как H полно, существует предел $v = \lim_{n\to\infty} v_i \in V$, так что условие леммы выполнено. Тем самым доказано утверждение (2).

Утверждение (3) вытекает из (2) чисто формально. Именно, пусть $H = V \oplus V^\perp$; тогда включение $V \subset (V^\perp)^\perp$ очевидно из определения. Если же, напротив, $u \in (V^\perp)^\perp$, то $u = v + w$, где $v \in V$ и $w \in V^\perp$; по условию, $(u, w) = 0$; так как $(u, w) = (w, w)$, имеем $w = 0$, откуда $u \in V$. □

Из неравенства Коши–Буняковского немедленно следует, что для всякого $w \in H$ отображение $v \mapsto (v, w)$ является непрерывным линейным функционалом на H: в самом деле, если $\|v_1 - v_2\| \leqslant \delta$, то

$$|(v_1, w) - (v_2, w)| = |(v_1 - v_2, w)| \leqslant \|v_1 - v_2\| \cdot \|w\| \leqslant \delta\|w\|.$$

Из доказанного предложения вытекает такое важное следствие.

Предложение 34.13. *Пусть H — гильбертово пространство. Тогда всякий непрерывный линейный функционал на H имеет вид $v \mapsto (v, w)$ для некоторого $w \in H$.*

Доказательство. Пусть $\lambda\colon H \to \mathbb{C}$ — ненулевой непрерывный линейный функционал, и пусть $V = \operatorname{Ker}\lambda$. Тогда V — замкнутое подпространство коразмерности 1, так что из предложения 34.11 следует, что пространство $V^\perp \simeq H/V$ одномерно. Пусть w — какая-нибудь образующая пространства $V^\perp$; тогда отображение $v \mapsto (v, w)$ является линейным функционалом с ядром V; стало быть, этот функционал пропорционален λ, так что существует такое $a \in \mathbb{C}$, что $\lambda(u) = a(u, w) = (u, \bar{a}w)$ для всех $u \in H$. Все доказано. □

До сих пор у нас шла речь об абстрактных пространствах с мерой; сейчас мы докажем два полезных технических результата про $\mathbb{R}^n$ с обычной мерой Лебега. Пространства L^1 и L^2 относительно этой меры будут обозначаться просто $L^1(\mathbb{R}^n)$ и $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Обозначение 34.14. Через $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ будем обозначать пространство бесконечно гладких функций на $\mathbb{R}^n$ с компактным носителем.

Предложение 23.1 показывает, что элементов в $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ много; ясно, что каждый элемент $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, будучи непрерывной функцией с компактным носителем, лежит в $L^1(\mathbb{R}^n)$ и $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Предложение 34.15. *Пространство $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ плотно в $L^1(\mathbb{R}^n)$ и в $L^2(\mathbb{R}^n)$.*

Доказательство. Докажем предложение для случая L^1 (случай L^2 полностью аналогичен). Мы воспользуемся методикой, которую во Франции называют «отвинчивание» (dévissage).

Именно, нам надо доказать, что всякую суммируемую функцию f можно с произвольной точностью аппроксимировать в L^1-норме функцией из $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Ясно, что для этого достаточно с произвольной точностью аппроксимировать ее вещественную и мнимую части по отдельности; поэтому можно считать, что f вещественна.

Далее, всякая вещественная суммируемая функция f представляется в виде разности $f = f_+ - f_-$, где f_+ и f_- суммируемы и неотрицательны, и достаточно аппроксимировать уменьшаемое и вычитаемое по отдельности; поэтому можно считать, что f неотрицательна.

Пусть теперь f неотрицательна; согласно лемме 15.12 существует возрастающая последовательность неотрицательных простых функций[10] f_n, поточечно сходящаяся к f. По теореме Беппо Леви имеем $\lim \int f_n dx = \int f dx$, откуда

$$\int |f - f_n| dx = \int (f - f_n) dx \to 0,$$

так что $fn \to f$ в L^1; тем самым достаточно аппроксимировать каждую f_n, так что можно считать, что f — простая функция.

Далее, поскольку всякая простая функция является линейной комбинацией характеристических функций измеримых множеств, можно

[10]Напомним, что функция называется простой, если она измерима и принимает лишь конечное число значений.

считать, что $f = \chi_E$ — характеристическая функция измеримого множества E. Заметим, что $E = \bigcup_k E_k$, где $E_{\subset} E_2 \subset \ldots$ и все множества E_k измеримы и ограничены; поэтому f является пределом монотонно возрастающей последовательности функций χ_{E_k}. Применяя то же рассуждение, что в предыдущем абзаце, получаем, что $\chi_{E_k} \to f$ в L_1, так что достаточно аппроксимировать каждую χ_{E_k}. Стало быть, можно считать, что $f = \chi_E$ — характеристическая функция *ограниченного* измеримого множества E.

Если, наконец, f — характеристическая функция ограниченного измеримого множества E, то ввиду регулярности меры Лебега (теорема 16.15) для всякого $\varepsilon > 0$ существует такое ограниченное открытое множество $U \supset E$ и такое компактное множество $K \subset E$, что $\mu(U \setminus K) < \varepsilon$. Как нетрудно проверить (у нас это утверждение было в задачах), для любых двух непересекающихся замкнутых множеств $F_0, F_1 \subset \mathbb{R}^n$ существует бесконечно гладкая функция $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, которая на F_0 тождественно равна нулю, на F_1 тождественно равна единице, и $0 \leqslant \varphi(x) \leqslant 1$ для всех $x \in \mathbb{R}^n$. Рассмотрим такую функцию φ, положив $F_0 = \mathbb{R}^n \setminus U$ и $F_1 = K$. Тогда $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, причем $|\varphi(x) - \chi_E(x)| \leqslant 1$ при всех $x \in \mathbb{R}^n$ и $|\varphi(x) - \chi_E(x)| = 0$ при $x \notin U \setminus K$. Следовательно, $\|\varphi - \chi_E\|_1 \leqslant \varepsilon$; ввиду произвольности ε все доказано. $\square$

Второй из нужных нам технических результатов выглядит следующим образом.

Предложение 34.16. *Пусть $f \in L^1(U)$, где $U \subset \mathbb{R}^n$ — открытое подмножество, и $\int f\varphi dx = 0$ для всех $\varphi \in \mathcal{D}(U)$. Тогда $f = 0$.*

Доказательство. Пусть f удовлетворяет условию предложения. Покажем, что $\int_E f dx = 0$ для всякого ограниченного измеримого множества E. Для этого заметим, что существуют убывающая последовательность ограниченных открытых множеств $\{U_m\}$ и возрастающая последовательность компактных множеств $\{K_m\}$, для которых

$$U_1 \supset \ldots \supset U_m \supset \ldots \supset E \supset \ldots \supset K_m \ldots \supset \ldots \supset K_1,$$

обладающие тем свойством, что $\mu(U_m \setminus K_m) < 1/m$ при всех m. Пусть, как и в доказательстве предложения 34.15, функция $\varphi_m \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ равна единице на K_m и нулю вне U_m; тогда последовательность $f \cdot \varphi_m$ сходится к $f \cdot \chi_E$ почти всюду на $\mathbb{R}^n$, так что по теореме Лебега об ограниченной сходимости имеем

$$\int_E f dx = \lim \int_U f \cdot \varphi_m dx = 0,$$

что и утверждалось.

Из доказанного немедленно вытекает, что $\int_E f dx = 0$ и для любого измеримого множества E. Покажем, что для суммируемой f отсюда вытекает, что $f = 0$ почти всюду.

В самом деле, отделяя вещественную и мнимую часть, получаем, что достаточно проверить утверждение для вещественной f, а представляя вещественную f в виде разности $f(x) = \max(f(x), 0) - \max(-f(x), 0)$, получаем, что f можно считать неотрицательной. Если множество нулей такой f имеет положительную меру, то положительную меру имеет и множество $f^{-1}[1/n; +\infty)$ для некоторого n, и тогда интеграл f по этому множеству отличен от нуля — противоречие. $\square$