Лекция 35. Преобразование Фурье в $\mathbb{R}^n$: формула обращения

При изложении преобразования Фурье нам будет удобно немного модифицировать меру Лебега. Именно, следуя У. Рудину, обозначим через μ обычную меру Лебега в $\mathbb{R}^n$, деленную на $(\sqrt{2\pi})^n$, и в дальнейшем при любом интегрировании по $\mathbb{R}^n$ или его подмножествам будем подразумевать, что интегрирование производится по μ, если явно не указано иное. Мера μ на $\mathbb{R}^{m+n}$ будет произведением мер μ на $\mathbb{R}^m$ и $\mathbb{R}^n$, так что теорема Фубини позволяет обычным способом сводить двойной интеграл к повторному. Разумеется, пространства L^1 и L^2 относительно этой меры — те же, что и относительно стандартной мере Лебега, и предложения 34.15 и 34.16 остаются в силе. Выбранная таким образом нормировка позволит нам избежать коэффициентов в некоторых формулах.

Если $x = x_1, \ldots, x_n$ и $\xi = \xi_1, \ldots, \xi_n$ — элементы $\mathbb{R}^n$, то через $\langle x, \xi \rangle$ мы будем обозначать «скалярное произведение» $x_1\xi_1 + \ldots + x_n\xi_n$ (следует представлять его как результат действия функционала ξ на вектор x). Если $x = x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^n$, то $|x| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$. Если $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ — мультииндекс, то $D^\alpha f$ обозначает, как обычно, соответствующую частную производную функции f, а через x^α обозначается моном $x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n}$.

Если $\xi \in \mathbb{R}^n$, то через $\chi_\xi \colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ будет обозначаться отображение

$$\chi_\xi \colon x \mapsto e^{i\langle x, \xi \rangle};$$

Это отображение является непрерывным гомоморфизмом аддитивной группы $\mathbb{R}^n$ в группу комплексных чисел, по модулю равных единице (такие отображения называются *характерами* группы $\mathbb{R}^n$; можно показать, что всякий характер группы $\mathbb{R}^n$ имеет вид χ_ξ для некоторого ξ).

Определение 35.1. Пусть $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Ее *преобразованием Фурье* называется функция $\hat{f} \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, заданная формулой

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\chi_{-\xi}(x)\,d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-i\langle x, \xi \rangle}\,d\mu(x).$$

(При более инварианом изложении следует рассмтаривать $\hat{f}$ как функцию на векторном пространстве, двойственном к $\mathbb{R}^n$, а при еще более инвариантном — как функцию на группе, состоящей из характеров группы $\mathbb{R}^n$.) Поскольку $|f(x)| = |f(x)\chi_{-\xi}(x)|$, в правой части формулы стоит интеграл от суммируемой функции, так что $\hat{f}(\xi)$ действительно определено для всех ξ.

Перечислим простейшие свойства преобразования Фурье.

Предложение 35.2. *Пусть $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Тогда выполнены следующие утверждения.*

(а) $\hat{f}$ — ограниченная непреывная функция на $\mathbb{R}^n$, причем $\lim_{|\xi|\to\infty} \hat{f}(\xi) = 0$.

(а′) $\sup_{\xi\in\mathbb{R}^n} |\hat{f}(\xi)| \leqslant \|f\|_1$.

(б) Если $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap C^1(\mathbb{R}^n)$ и $\frac{\partial f}{\partial x_k} \in L^1(\mathbb{R}^n)$, то $(\partial f/\partial x_k)\hat{} = i\xi_k \hat{f}$.

(в) Если $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ и $x_k f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, то частная производная $\partial \hat{f}/\partial \xi_k$ существует и $(x_k f)\hat{} = i(\partial \hat{f}/\partial \xi_k)$.

Доказательство. Утверждение (а′) очевидно («модуль интеграла не превосходит интеграла от модуля»). Непрерывность функции $\hat{f}$ немедленно следует из теоремы об ограниченной сходимости.

Для доказательства утверждения (б) нам понадобится такая лемма.

Лемма 35.3. *Если $f \in C^1(\mathbb{R})$ и $f' \in L^1(\mathbb{R})$, то $\lim_{|x|\to\infty} f(x) = 0$.*

Доказательство леммы. Так как f' непрерывна и суммируема, существует предел $\lim_{a\to\infty} \int_0^a f'(x)dx$; так как $\int_0^a f'(x)dx = f(a) - f(0)$, существует и предел $\lim_{x\to\infty} f(x)$. Если этот предел отличен от нуля, то $|f(x)| > \varepsilon > 0$ для всех достаточно больших x, что противоречит конечности интеграла $\int_{\mathbb{R}} |f|dx$. Аналогично обстоит дело с пределом при $x \to -\infty$. □

Возвращаясь к пункту (б), запишем равенство

$$\int \frac{\partial f}{\partial x_k} e^{-i\langle x,\xi\rangle} dx = \int dx_1 \dots dx_{k-1} dx_{k+1} \dots dx_n \underbrace{\int \frac{\partial f}{\partial x_k} e^{-i\langle x,\xi\rangle} dx_k}_{I}. \quad (35.1)$$

Интегрируя по частям, получаем, что

$$I = \lim_{A\to+\infty} \left(f e^{-i\langle x,\xi\rangle} \right)_{-A}^{A} - \int_{\mathbb{R}} f \cdot (-i\xi_k) e^{-i\langle x,\xi\rangle} dx_k,$$

причем первое слагаемое равно нулю по лемме. Подставляя в (35.1), получаем, что

$$\widehat{\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right)} = i\xi_k \int dx_1 \dots dx_{k-1} dx_{k+1} \dots dx_n \int f e^{-i\langle x,\xi\rangle} dx_k = i\xi_k \hat{f}(\xi),$$

что и требовалось.

Утверждение (в) формально получается дифференцированием под знаком интеграла в определении $\hat{f}$:

$$\frac{\partial}{\partial \xi_k} \int f(x) e^{-i\langle x,\xi\rangle} dx = \int f(x) \cdot (-ix_k) e^{-i\langle x,\xi\rangle} dx,$$

откуда все следует, если только такое дифференцирование законно. Его законность проверяется с помощью теоремы об ограниченной сходимости. Именно, если обозначть через $\tilde{h} \in \mathbb{R}^n$ вектор, у которого k-я компонента равна h, а остальные равны нулю, то

$$\left| \frac{e^{-i\langle x,\xi+h\rangle} - e^{-i\langle x,\xi\rangle}}{h} \right| = \left| \frac{e^{ix_k h} - 1}{h} \right| \leqslant 2|x_k|;$$

поскольку, по условию, функция $x_k f$ суммируема, теорема об огррaниченной сходимости применима и утверждение (в) доказано.

Осталось доказать, что $\lim_{|\xi|\to\infty} \hat{f}(\xi) = 0$. Для этого рассмотрим сначала случай $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Так как и сама f, и все ее частные производные лежат в $L^1(\mathbb{R}^n) \cap C^1(L^n)$, из уже доказанного утверждения (б) вытекает, что для всякого k функция $\xi_k \hat{f}$ является преобразованием Фурье какой-то функции из L^1 и тем самым ограничена. Стало быть, $\hat{f}(\xi) = O(1/|\xi|)$ при $|\xi| \to \infty$, так что $\lim_{|\xi|\to\infty} \hat{f}(\xi) = 0$. Если теперь $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ произвольна, то ввиду предложения 34.15 существует последовательность функций $f_n \in L^1(\mathbb{R}^n)$, сходящаяся к f в L^1-метрике; по доказанному, все $\hat{f}_n$ стремятся к нулю на бесконечности, а ввиду пункта (a$'$) последовательность $\hat{f}_n$ сходится к $\hat{f}$ равномерно. Значит, и $\hat{f}$ стремится к нулю на бесконечности. $\square$

Введем еще два обозначения. Пусть f — произвольная функция на $\mathbb{R}^n$. Тогда через $\check{f}$ будем обозначать композицию f и центральной симметрии относительно начала координат (т.е. $\check{f}(x) = f(-x)$). Если $a \in \mathbb{R}^n$, то через $T_a f$ («сдвиг на a») будем обозначать функцию $x \mapsto f(x-a)$.

Предложение 35.4. *Пусть $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $a \in \mathbb{R}^n$ и A — невырожденная $n \times n$-матрица, рассматриваемая как линейный оператор из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^n$ (левое умножение на вектор-столбец).*

(а) $(T_a f)\hat{\ } = \chi_{-a} \cdot \hat{f}$.

(б) $(\chi_a \cdot f)\hat{\ } = T_a(\hat{f})$.

(в) $(f \circ A)\hat{\ }(\xi) = \frac{1}{|\det A|} \hat{f}({}^t A^{-1} \xi)$.

Доказательства, представляющие собой тривиальные упражнения на замену переменной, предоставляются читателю.

Следствие 35.5. *(а)* $(\hat{f})\check{} = (\check{f})\hat{}$.

(б) Если $\lambda > 0$, *то* $(f(x/\lambda))\hat{}(\xi) = \lambda^n \hat{f}(\lambda\xi)$.

Определение 35.6. *Пространством Шварца* $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ называется множество бесконечно гладких функций $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, обладающих следующим совйством: для всякого мультииндекса α и всякого $N > 0$ имеем $|D^\alpha f(x)| = O(|x|^{-N})$ при $|x| \to \infty$.

(Случай нулевого мультииндекса не исключается, так что сама $f(x)$ также должна убывать на бесконечности быстрее любой степени $|x|$.) В определении, очевидно, можно было бы заменить O на o. Элементы пространства $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ называются *шварцевскими*, или *быстро убывающими*, функциями.

Предложение 35.7. *Если* $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, *то* $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ *и* $\hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Доказательство. Из определения ясно, что $f \in L^1$ и, более того, $x^\alpha f \in L^1$ для всякого мультииндекса α; применяя $|\alpha|$ раз утверждение (в) предложения 35.2, получаем, что функция $D^\alpha \hat{f}$ существует и непрерывна; тем самым доказано, что $\hat{f}$ бесконечно дифференцируема. Далее, если $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, то из формулы Лейбница очевидно, что $x^\beta f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ для всякого мультииндекса β. Следовательно, для всякого мультииндекса α получаем (опять из предложения 35.2), что функция $\xi^\alpha D^\beta \hat{f}$ является прелобразованием Фурье суммируемой функции и тем самым ограничена; отсюда ясно, что $|D^\beta \hat{f}(\xi)| = O(|\xi|^{-N})$ для всякого $N > 0$. ☐

Предложения 35.2 и 35.4 наводят на мысль, что между f и $\hat{f}$ имеется определенная симметрия. Эта симметрия составляет содержание так называемой «теоремы (или формулы) обращения», к формулировке и доказательству которой мы сейчас переходим. Сначала докажем два вспомогательных утверждения: одно чисто техническое и одно содержательное.

Лемма 35.8 (техническая). *Пусть* $\varphi_n(x) = e^{-|x|^2}/2$. *Тогда* $\hat{\varphi}_n(x) = \varphi_n(x)$ *для всякого* x.

Доказательство. Разберем сначала случай $n = 1$. Ясно, что $\varphi = \varphi_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ (так что функция $\hat{\varphi}$ также шварцевская и, в частности, бесконечно дифференцируемая), а также что выполнено тождество $\varphi'(x) = -xf(x)$. Из предложения 35.2 теперь вытекает, что

$(\hat{\varphi})'(\xi) = -\xi\hat{\phi}(\xi)$ для всех ξ. Стало быть, функции φ и φ' удовлетворяют одному и тому же обыкновенному дифференциальному уравнению; более того, их значения в нуле совпадают (и равны единице): для φ это очевидно, а для $\hat{\varphi}$ вытекает из хорошо известного вычисления интеграла от e^{-x^2} по $\mathbb{R}$ (у нас оно было в задачах). Стало быть, $\hat{\varphi} = \varphi$ по теореме единственности дял обыкновенных дифференциальных уравнений.

Случай произвольного n немедленно следует из случая $n = 1$ (так как переменные разделяются: $\varphi_n(x_1, \ldots, x_n) = \varphi_1(x_1)\ldots\varphi_n(x_n)$). $\square$

Заметим, что доказанная лемма — единственное место, в котором мы явно используем выбор нормировки меры Лебега.

Предложение 35.9. *Пусть $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Тогда $\int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}\cdot g d\mu = \int_{\mathbb{R}^n} f\cdot\hat{g} d\mu$ (в частности, оба этих интеграла существуют в том смысле, что подынтегральные выражения суммируемы).*

Доказательство. Применим теорему Фубини к двойному интегралу

$$\iint_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n} f(x)g(\xi)e^{-i\langle x,\xi\rangle}d(\mu\times\mu). \tag{35.2}$$

Если обозначить подынтегральную функцию через $F(x,\xi)$, то для всякого x имеем $\int |F(x,\xi)|d\mu(\xi) \leqslant |f(x)|\|g\|_1$, откуда

$$\int d\mu(x)\int |F(x,\xi)|d\mu(\xi) \leqslant \|g\|_1\cdot\|f\|_1 < \infty.$$

Стало быть, условия теормы Фубини для интеграла (35.2) выполнены, так что два повторных интеграла существуют и совпадают. Совпадение этих интегралов как раз и составляет содержание предложения. $\square$

Теорема 35.10 (формула обращения). *(а) Пусть $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Тогда $\hat{\hat{f}} = \check{f}$. Подробнее:*

$$f(x) = \int \hat{f}(\xi)e^{i\langle x,\xi\rangle}d\mu(\xi)$$

(обратите внимание на знак в показателе).

(б) Пусть $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ и $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Тогда $\hat{\hat{f}} = \check{f}$ (равенство в пространстве L^1, т. е. равенство функций почти всюду).

Доказательство. Докажем сначала часть (а). Пусть $a \in \mathbb{R}^n$. Тогда, с учетом предложения 35.4, имеем

$$(\hat{\hat{f}})\check{}(a) = T_a\hat{\hat{f}}(0) = (\chi_a\cdot\hat{f})\hat{}(0) = (T_{-a}f)\hat{}(0);$$

с другой стороны, по определению имеем $f(a) = (T_{-a}f)(0)$. Поэтому для доказательства формулы обращения для шварцевских функций достаточно доказать следующий ее частный случай:

$$\hat{\hat{f}}(0) = f(0), \qquad \text{или} \qquad \int \hat{f}(\xi)d\xi = f(0).$$

Положим теперь, как и в лемме 35.8, $\varphi(x) = e^{-|x|^2/2}$, и пусть $\lambda > 0$. Тогда ввиду предложения 35.9 и следствия 35.5 имеем

$$\int \hat{f}(x)\varphi(x/\lambda)dx = \lambda^n \int f(x)\hat{\varphi}(\lambda x)dx = \int f(\lambda^{-1}y)\varphi(y)dy$$

(во втором равенстве мы воспользовались тождеством $\hat{\varphi} = \varphi$ из леммы 35.8, а затем следали замену переменной $\lambda x = y$). Устремим теперь λ к бесконечности; тогда левая часть, ввиду теоремы об ограниченной сходимости, будет стремиться к $\varphi(0)\int \hat{f}(x)dx = \int \hat{f}(x)dx$, а правая, по той же теореме, будет стремиться к $f(0)\int \varphi(y)dy = f(0)$. Тем самым утверждение (а) доказано. (Упражнение: что мешает с помощью этого же рассуждения доказать часть (б)?)

Для доказательства утверждения (б) запишем, для произвольной $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, следующую цепочку равенств:

$$\int \hat{\hat{f}} \cdot \psi dx = \int \hat{f} \cdot \hat{\psi} d\xi = \int f \cdot \hat{\hat{\psi}} dx = \int f \cdot \check{\psi} dx = \int \check{f} \cdot \psi dx$$

(последнее равенство очевидно, остальные вытекают из предложения 35.9 и уже доказанной первой части теоремы). Ввиду произвольности ψ все теперь вытекает из предложения 34.16. $\square$